М. В. Васильева

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА К СПЕЦКУРСУ «ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ»

МГПИ
имени
В.И. ЛЕНИНА

Министерство просвещения РСФСР

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт имени В.И.Ленина

М.В.ВАСИЛЬЕВА

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА К СПЕЦКУРСУ

„ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ"

Москва - 1984

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного педагогического института имени В.И.Ленина

Рецензенты: профессор В.И.Пономарев,
доцент В.В.Тимошенко.

ГЛАВА I. ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

§ I. Введение

Со школы мы привыкли к тому, что математика и в частности геометрия строится на аксиоматической основе: в основу кладутся неопределяемые объекты, отношения и аксиомы, которым они удовлетворяют, и затем чисто логическим путем получается вся теория. Так было у нас с евклидовой геометрией ([II], с.56), с аффинной ([II], с.5), с проективной ([II], с. 6). Но откуда берутся различные аксиоматики?

Одним из основных источников получения различных теорий, а значит и различных аксиоматик, является действительность. А в действительности мы имеем, грубо говоря, лишь трехмерное евклидово пространство E_3 (или двумерную евклидову плоскость E_2) со своей аксиоматикой ([II], с. I7) и тем, что есть в этом пространстве – объектами и отношениями, построенными над этой аксиоматикой.

Тем самым аксиоматика T многих математических теорий является абстракцией чего-то в E_3, т.е. на современном языке это что-то в E_3 является моделью $\mathcal{J}_{E_3}(T)$ аксиоматики T. Практически многие классические геометрии и получились как теории моделей в E_3. (В старые времена никаких других пространств и не мыслили). Например, проективная геометрия P_3 возникла как геометрия расширенного пространства E_3^* ([II], с.22), изучающая лишь его свойства принадлежности и разделяемости. Аффинная геометрия A_3 – это теория евклидова пространства, изучающая его свойства принадлежности и параллельности.

Тем самым во многих случаях, чтобы получить новую геометрию и ее аксиоматику, нужно выделить в E_3 некоторые объекты и отношения и рассмотреть свойства, которыми они обладают. Но как эти объекты и отношения получить в E_3 – по какому принципу их выделить?

Ф.Клейн предложил в качестве них брать такие конструкции объектов и отношений трехмерного евклидова пространства E_3, которые выдерживают преобразования некоторой группы преобразований (сохраняющиеся при преобразованиях этой группы). Тогда соответствующая геометрия будет теорией инвариантов, сохраняющихся при этих преобразованиях. (Аксиоматическая теория противоположна: берутся объекты и отношения, удовлетворяющие аксиомам, т.е. обладающие свойствами, высказанными в этих аксиомах, и в качестве соответствующих преобразований берутся те, которые их сохраняют). Например, возникшие из практических соображений ([I0], с.I0) проективные преобразования расширенной плоскости E_2^* сохраняют прямолинейность (прямые переходят в прямые)

и разделяемость двух пар точек одной прямой. Они и порождают неопределяемые отношения аксиоматики проективной плоскости, а свойства, которым они удовлетворяют, дают соответствующие аксиомы ([9] с.19,21,26). Аналогично, группа движений D порождает евклидову геометрию, группа подобных преобразований – элементарную геометрию, группа аффинных преобразований – аффинную геометрию, группа конформных преобразований – конформную геометрию.

Тем самым, отыскание моделей различных геометрий в E_3 сводится часто к отысканию различных групп преобразований в E_3. Если иметь ввиду так называемые группы Ли: группы непрерывных преобразований, совокупность которых также непрерывно зависит от некоторых параметров, т.е. которые, грубо говоря, относительно декартовых координат на E_2 можно задать уравнениями $x'^i = f^i(x^j, a^s)$, $i,j = 1,2;\ s = 1,\dots,r$ (I)

где f^i являются гладкими функциями x^j, a^s, то на плоскости E_2 их очень немного, и они все перечислены ([I5],с.6). Более того, между группами преобразований G_1 и G_2 одного множества E_2 (или E_3) может существовать подчиненность

$$G_1 \subset G_2 \tag{2}$$

группа G_1 может быть подгруппой G_2. Тогда геометрия Γ_1 охватывает геометрию Γ_2

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \tag{3}$$

ибо всякое свойство, которое сохраняется при всех преобразованиях группы G_2 подавно сохраняется при преобразованиях ее подгруппы G_1 (аксиоматика Γ_2 является подаксиоматикой Γ_1 ([II], с. 20). Так группы движений D, подобных преобразований Π, аффинных преобразований A, проективных преобразований P связаны подчиненностью

$$D \subset \Pi \subset A \subset P. \tag{4}$$

и значит, соответствующие геометрии охватывают одна другую

$$E \supset \Pi \supset A \supset P \tag{5}$$

Чем шире группа преобразований G, содержащая подгруппой группу движений D, тем меньше свойств евклидовой плоскости сохраняется при ее преобразованиях, но те, которые при них сохраняются, являются более глубокими свойствами евклидовой геометрии, более крепко с ней связанными. На этом пути естественно искать группу преобразований более широкую чем группа проективных преобразований, и значит, геометрию более узкую чем проективная геометрия. Более общими преобразованиями на E_2 (и в E_3) являются <u>взаимно однозначные и взаимно непрерывные преобразования f</u>. Сужение такого преобразования на любое множество X в E_3 дает его взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение на другое множество X', в частности E_2 на E_2'

$$X \xrightarrow{f|_X} X' \qquad f: E_3 \to E_3', \qquad f|_X : X \to X' \tag{6}$$

Отказавшись от требования, чтобы отображение $f_{|X}$ было сужением преобразования всего пространства E_3, мы придем к понятию гомеоморфизма и предмету топологии множества X в E_3.

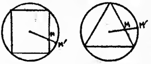
<u>Определение</u>. Гомеоморфизмом в E_3 называется взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение подмножества X на подмножество X'. Множества X и X' при этом называются гомеоморфными.

Совокупность объектов, отношений и свойств, сохраняющихся при гомеоморфизмах, образуют, как раньше говорили, топологию множества X, теперь же мы скажем модель топологии на X в E_3.

Например, топологию поверхности V ([13], с.59) в евклидовом пространстве E_3 составляет то, что сохраняется при любых гомеоморфизмах (и может не сохраняться при негомеоморфизмах), т.е. то, что одинаковое у гомеоморфных поверхностей (и может быть различным у негомеоморфных). Если поверхность в E_3 выполнить из эластичной пленки, то гомеоморфизм в E_3 наглядно можно представить в виде деформации (растяжения) без разрывов (нарушения непрерывности) и складок (нарушения однозначности). Поэтому топологию иногда называют резиновой геометрией. Рассмотрим примеры гомеоморфных и негомеоморфных фигур.

§ 2. <u>Гомеоморфные и негомеоморфные фигуры</u>

1. Окружность гомеоморфна краю квадрата, треугольника.



Действительно, опишем около них окружность. Тогда гомеоморфизм между ними осуществляет проекция из центра окружности.

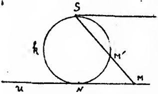
2. Евклидова прямая гомеоморфна окружности с выколотой точкой.

Действительно, рассмотрим окружность k касательную к прямой u в точке N и точку S ее, диаметрально противоположную точке N. Тогда, проектируя из точки S прямую u на $k\setminus S$, получим их гомеоморфизм.

3. Также рассмотрим полуокружность без концов, касательную к прямой u в точке N и такую, что диаметр, соединяющий ее концы, параллелен прямой u. Проектируя из центра O полуокружности прямую u на нее, получим их гомеоморфизм. Таким образом евклидова прямая гомеоморфна полуокружности без концов.

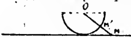
4. Рассмотрим модель проективной прямой - расширенную прямую: евклидову прямую u, пополненную несобственной точкой S^*, кото-

рая определяется пучком прямых параллельных прямой u, и окружность k касательную к прямой u в точке N. Проектируя точки расширенной прямой u^* на окружность k из точки S ее, диаметрально противоположной точке N, получим что расширенная прямая гомеоморфна окружности. В силу полноты проективной геогеометрии этот факт переносится на общую проективную прямую.



Всякая проективная прямая гомеоморфна окружности.

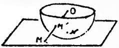
5. Также расширенная, а значит, и проективная прямая гомеоморфна полуокружности с отождествленными (идентифицированными) концами.



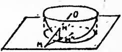
6. Круг (с границей) гомеоморфен любому простому многоугольнику

7. Куб и тетраэдр гомеоморфны сфере, описанной около них

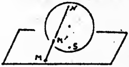
8. Полусфера (без края) гомеоморфна евклидовой плоскости при помощи проекции из центра полусферы O точек полусферы на плоскость, касательную к ней, например, в ее полюсе N.



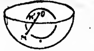
9. Евклидова плоскость гомеоморфна внутренности круга при помощи композиции проекции плоскости на полусферу из ее центра и ортогональной проекции на ту же плоскость $M \to M' - M''$



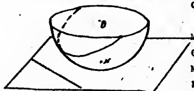
10. Евклидова плоскость E_2 гомеоморфна сфере $\varkappa$ с одной выколотой точкой N при помощи проекции из точки N плоскости, касательной к сфере в точке S противоположной к N, на сферу. (Это отображение называется стереографической проекцией).



11. Тем самым, компонируя 9. и 10, получим, что полусфера гомеоморфна сфере с одной выколотой точкой O. Это неожиданно, но следует из гомеоморфизма, указанного на рисунке.

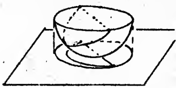


12. Рассмотрим модель проективной плоскости - расширенную плоскость ([9], с.6): евклидову плоскость E_2, пополненную несобственными точками, каждая из которых определяется связкой прямых, параллельных одной прямой этой плоскости. Проектируя ее на полусферу $\varkappa_2$, касательную к этой плоскости E_2 и диаметральная плоскость



которой параллельна плоскости E_2, получим, что проективная плоскость гомеоморфна полусфере с отождествленными диаметрально противоположными точками края. Тогда прямые расширенной, а значит, и проективной плоскости, будут изображаться большими полуокружностями полусферы с идентифицированными концами диаметров, параллельных этим прямым.

13. Проектируя ортогонально полусферу $\varkappa_2$ на евклидову плоскость E_2 касательную к полусфере в точке N, получим модель расширенной плоскости в виде диска (круга) с идентифицированными диаметрально противоположными точками края - моделями несобственных точек. Тогда прямые будут изображаться диаметрами этого круга с идентифицированными концами и ([10], с. 73) полуэллипсами, большие оси которых совпадают с этими диаметрами, и концы которых также идентифицированы.



Тем самым мы видим, что понятия прямой, окружности, сферы, плоскости не являются топологическими, ибо они не сохраняются при гомеоморфизмах.

Также интуитивно ясно, что один кусок эластичной ткани не гомеоморфен двум разным ее кускам, сфера не гомеоморфна тору или кренделю

плоскость не гомеоморфна кубу. А почему?

А вот такие поверхности: тор с дыркой и две нарисованные ленты

гомеоморфны между собой или нет?

Как же найти на этот вопрос регулярный ответ?

На I курсе при изучении кривых 2-го порядка на евклидовой плоскости ([7], с.81) мы могли по уравнениям двух кривых

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0 \qquad i,j = 1,2 \tag{1}$$

и

$$a'_{ij}x^{i'}x^{j'} + 2a'_{i0}x^{i'} + a'_{00} = 0 \tag{2}$$

ответить на вопрос об их конгруэнтности: эвклидовой эквивалентности, т.е. существует ли движение, переводящее первую во вторую. Для этого, как помним ([7], с. 83.85), нужно было подсчитать инварианты

$$J_1 = a_{11} + a_{22}, \quad J_2 = |a_{ij}| \ (i,j = 1,2), \quad J_3 = |a_{IJ}| \ (I,J = 0,1,2) \tag{3}$$

левых частей этих уравнений, и если, например, обе кривые невырождены и не являются параболами, т.е.

$$J_3 \neq 0, \ J'_3 \neq 0, \ J_2 \neq 0, \ J'_2 \neq 0, \tag{4}$$

то они будут конгруэнтны, если

$$\frac{s_i J_2}{J_3} = \frac{s'_i J'_2}{J'_3}. \tag{5}$$

где s_i – корни характеристического уравнения

$$s^2 - J_1 s + J_2 = 0, \qquad s'^2 - J'_1 s' + J'_2 = 0. \tag{6}$$

Аналогично, в топологии – если бы мы получили полную систему топологических инвариантов, т.е. таких характеристик поверхности, что если поверхности V и V' гомеоморфны, то они одинаковы, и наоборот, если эти характеристики одинаковы, то поверхности гомеоморфны, то мы смогли бы ответить на вопрос об гомеоморфности нарисованных поверхностей (см. с. 64).

Итак, отталкиваясь от интуиции, нужно строить теорию топологии, а это, значит, в первую очередь получить соответствующую аксиоматику.

§ 3. Аксиоматика П.С.Александрова топологического пространства

Мы видели ([II], с. 6), что с современной точки зрения математика изучает **множества** M_J, элементы которых называются объектами, **отношения между ними** P_J – подмножества в шкале, построенной над ними, и соотношения α_K между ними, которые можно выразить на теоретико-множественном **и математико**-логическом языке

$$\{M_J, P_J, \alpha_K\}. \tag{1}$$

В основе всякой математической теории лежат априори заданные множества m_i – множества основных объектов, а также отношения p_j между ними, про которые лишь известна их типизация и то, что они удовлетворяют некоторым соотношениям α_k – аксиомам

$$\Sigma = \{m_i, p_j, \alpha_k\} \tag{2}$$

и вся теория заключается в том, чтобы математико-логическими методами

из них получить другие объекты, отношения и соотношения – теоремы.

Совокупность (2) называется аксиоматикой соответствующей математической теории.

Так будет и для топологии. Как же получить ее аксиоматику?

Согласно сказанному в § I, чтобы получить аксиоматику топологического пространства, нужно рассмотреть его модель на евклидовом пространстве E_3 или на евклидовой плоскости E_2, которая состоит из объектов и отношений его, сохраняющихся при гомеоморфизмах, найти эти объекты и отношения, а также свойства, которым они удовлетворяют, и которые можно выразить через них и математико-логические и теоретико-множественные термины, а затем независимые из них объявить неопределяемыми объектами, отношениями и аксиомами топологического пространства T.

Вместо евклидовой плоскости E_2 для возможности будущих обобщений и ссылок будем рассматривать n-мерное евклидово пространство E_n. Евклидова плоскость из него получится, если вместо n брать 2.

Поскольку мы рассматриваем модель топологического пространства на евклидовом пространстве E_n, моделями основных объектов будут точки евклидова пространства E_n. Эти объекты мы назовем также точками топологического пространства T.

Отношением называется ([II], с.8) подмножество любой ступени шкалы, построенной над этим множеством T, т.е. если говорить о первой ступени, то подмножество множества всех подмножеств

$$\rho \subset \mathcal{P}(T), \tag{I}$$

т.е. множество некоторых подмножеств множества T.

Какое же множество подмножеств точек плоскости E_2 (пространства E_n) сохраняется при гомеоморфизмах? Гомеоморфизм – это взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства E_n на пространство E_n'. Определение непрерывности по Коши отображения E_n на E_n' (E_2 на E_2') было дано на I курсе в таком виде.

<u>Определение</u>. Отображение евклидова пространства E_n, расстояние между любыми двумя точками x_1, x_2 которого определяется числовой функцией $\ell(x_1,x_2)$

$$\ell(x_1,x_2) \in \bar{R}^{+\,*} \tag{2}$$

---

*) Правильнее здесь и в дальнейшем вместо множества неотрицательных действительных чисел $\bar{R}^+$ иметь множество величин W ([II], с.38). Однако, ввиду их тесной связи ([II], с.39) и установившейся традиции, будем вместо расстояния $\lambda(x_1,x_2) \in W$ брать его меру $\ell(x_1,x_2) \in \bar{R}^+$ и называть ее расстоянием.

на E_n' с тем же расстоянием $\qquad \ell(x_1', x_2') \in \bar{R}^+,$ (3)

$$f: E_n \to E_n', \qquad f(x) = x' \tag{4}$$

называется непрерывным в точке $x_0 \in E_n$, если для любого $\varepsilon \in \bar{R}^+$ существует $\delta \in \bar{R}^+$ так е, что

$$\forall x \in E_n \mid \ell(x_0, x) < \delta \longrightarrow \ell(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \tag{5}$$

Введем понятие ε -окрестности.

Определение. В евклидовом пространстве E_n ε -окрестностью $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 называется совокупность точек, удаленных от точки x_0 менее чем на расстояние $\varepsilon \in \bar{R}^+$

$$O_\varepsilon(x_0) = \{x \mid \ell(x_0, x) < \varepsilon\}. \tag{6}$$

Тогда отображение (4) непрерывно в точке x_0, если

$$\forall O_\varepsilon(f(x_0)) \ \exists O_\delta(x_0) \mid f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0)). \tag{7}$$

Отображение (4) называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой своей точке.

Но существует и другое определение непрерывности, если ввести понятие открытого множества U на E_n.

Определение. Подмножество U евклидового пространства E_n

$$U \subset E_n \tag{8}$$

называется открытым множеством, если для любой его точки x_0 существует ее ε -окрестность $O_\varepsilon(x_0)$, целиком принадлежащая множеству U,

$$\forall x_0 \subset U \ \exists \varepsilon \in \bar{R}^+ \mid O_\varepsilon(x_0) \subset U. \tag{9}$$

Лемма. В евклидовом пространстве E_n любая ε -окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 является открытым множеством.

Действительно, пусть

$$x_1 \in O_\varepsilon(x_0), \tag{10}$$

т.е.

$$\ell(x_0, x_1) < \varepsilon. \tag{11}$$

Рассмотрим положительное число

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \ell(x_0, x_1) \tag{12}$$

и ε_1 -окрестность точки x_1

$$O_{\varepsilon_1}(x_1) = \{x_2 \mid \ell(x_1, x_2) < \varepsilon_1\} \tag{13}$$

Докажем, что $\qquad O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x_0).$ (14)

В силу неравенства треугольника ([II], с. 57)

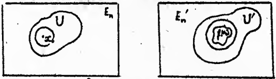
$$\ell(x_0, x_2) \leq \ell(x_0, x_1) + \ell(x_1, x_2) \tag{15}$$

откуда в силу (II), (I3), (I2)
$$\rho(x_0, x_2) < \varepsilon. \tag{I6}$$

Так вот при помощи открытых множеств можно доказать такую теорему.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы взаимно однозначное отображение E_n в E_n'
$$f: E_n \to E_n' \tag{I7}$$
было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого открытого множества U' на E_n' был бы открытым множеством U на E_n
$$f^{-1}(U') = U \tag{I8}$$

<u>Необходимость</u>. Пусть U' – любое открытое множество на E_n'. Поскольку отображение (I7) взаимно однозначное, то существует прообраз всего U'



$$f^{-1}(U') = U \tag{I9}$$
Докажем, что U – открытое множество, т.е. для любой его точки x_0 существует δ -окрестность ее на E_n, целиком принадлежащая множеству U
$$\forall x_0 \in U \;\; \exists \;\; O_\delta(x_0) \subset U. \tag{20}$$
Поскольку $x_0 \in U$, то
$$f(x_0) \in U' \tag{2I}$$
и поскольку U' – открытое множество, существует ε - окрестность точки $f(x_0)$ на E_n', принадлежащая U'
$$\exists\, \varepsilon \in \bar{R}^+ \mid \; O_\varepsilon(f(x_0)) \subset U'. \tag{22}$$
Тогда в силу непрерывности отображения по Коши существует
$$\delta \in \bar{R}^+ \mid \; f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0)); \tag{23}$$
т.е. в силу (22)
$$f(O_\delta(x_0)) \subset U', \tag{24}$$
откуда в силу (I9)
$$O_\delta(x_0) \subset U, \tag{25}$$
т.е. U – открытое множество.

<u>Достаточность</u>. Пусть
$$x_0 \in E_n \tag{26}$$
и
$$\forall \varepsilon \in \bar{R}^+ \quad O_\varepsilon(f(x_0)) = \{ f(x) \in E_n' \mid \rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \}. \tag{27}$$
Поскольку в силу леммы $O_\varepsilon(f(x_0))$ открыто в E_n', то
$$f^{-1}(O_\varepsilon(f(x_0))) = U \tag{28}$$
открыто в E_n и содержит точку x_0
$$U \ni x_0, \tag{29}$$

потому существует $\delta > 0$ такое, что

$$O_\delta(x_0) \subset U, \tag{30}$$

поскольку

$$f(U) = O_\varepsilon(f(x_0)), \tag{31}$$

то

$$f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0)). \tag{32}$$

<u>Замечание</u>. Вся приведенная теория повторяется и для отображения множества $X \subset E_n$ в множество $Y \subset E_n'$.

$$X \to Y \tag{33}$$

если везде заменить ε (или δ) -окрестность точки x_0 (или $y_0 = f(x_0)$) на сужение этой ε (или δ) -окрестности на X (или на Y)

$$O_\delta(x_0) \to O_\delta(x_0)|_X = O_\delta(x_0) \cap X, \quad O_\varepsilon(y_0) \to O_\varepsilon(y_0)|_Y = O_\varepsilon(y_0) \cap Y. \tag{34}$$

Тогда открытые множества пространства $X \subset E_n$ будут являться пересечениями открытых множеств евклидова пространства E_n с X

$$U_X = U_{E_n} \cap X. \tag{35}$$

В силу этой теоремы можно дать такое определение непрерывного отображения.

<u>Определение</u>. Отображение $X \subset E_n$ в $Y \subset E_n'$ называется непрерывным, если при нем прообраз любого открытого множества $U' \subset Y$ является открытым множеством $U \subset X$.

<u>Следствие</u>. Поскольку гомеоморфизмы – это взаимно однозначные и взаимно непрерывные отображения, то при них открытые множества переходят в открытые, т.е. при гомеоморфных отображения открытость сохраняется. Таким образом, согласно нашим рассуждениям (с. 9) <u>открытость подмножеств топологического пространства</u> и нужно взять в качестве <u>неопределяемого отношения</u>.

Поскольку тогда гомеоморфизмы определяются как взаимно однозначные отображения, сохраняющие открытость, а через гомеоморфизмы определяются все топологические свойства, то <u>открытость подмножества топологического пространства</u> будет <u>единственным</u> неопределяемым отношением топологического пространства.

Чтобы указать соответствующие аксиомы, описывающие через теоретико-множественные и математико-логические термины свойства, которым удовлетворяют открытые множества, нужно оглянуться на евклидово пространство и найти там их свойства, выражающиеся через теоретико-множественные и математико-логические понятия, а именно ([II], с.7) свойства пересечения и объединения.

Легко доказать, что в E_n открытые множества удовлетворяют свойствам:

1) Все E_n -открытое, пустое множество - открытое;
2) Объединение двух открытых множеств - открытое, и, значит, объединение любого числа открытых множеств - открытое;
3) Пересечение двух открытых множеств - открытое, и, значит, пересечение конечного числа открытых множеств - открыто.

Требование, чтобы аналогичными свойствами обладали открытые множества топологического пространства, даст аксиомы топологического пространства. Итак, ([II], с. I9):

Определение. Топологическим пространством (по Александрову)

$$T\{M, p, \alpha_\kappa\} \tag{36}$$

называется множество элементов M, называемых точками, в котором выделены некоторые подмножества

$$p = \{U\} \subset \mathcal{P}(M), \tag{37}$$

называемые открытыми и удовлетворяющие аксиомам:

I) Все пространство T и пустое множество $\varnothing$ -открытые;
2) Объединение любого числа открытых множеств - открытое;
3) Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое.

§ 4. Модели топологического пространства T

В модели топологического пространства модель основного отношения, т.е. модель открытых множеств, называется топологической структурой или кратко топологией. Ее от топологии как науки, изучающей топологические пространства, придется отличать по контексту.

Рассмотрим некоторые модели топологического пространства.

I) Евклидово пространство E_n. Моделью топологического пространства T является евклидово пространство E_3 (и евклидова плоскость E_2), т.к. топологическое пространство и получилось их абстракцией. Таким образом имеем

$$\mathcal{J}_{E_3}(T) \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_{E_2}(T). \tag{I}$$

Аналогично имеется

$$\mathcal{J}_{E_n}(T). \tag{2}$$

2) Арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}_n$. Арифметическим евклидовым пространством называется модель $\mathbb{R}_n$ евклидова пространства E_n построенная над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$, когда точка x интерпретируется упорядоченным множеством n действительных чисел x^i, называемых ее координатами, и в которой задана положительно определенная квадратичная форма ([8], с. 96)

$$g(\bar{u}, \bar{u}), \tag{?}$$

где $\bar{u}$ -вектор, соответствующий по аксиоме Вейля ([II], с.I7) паре точек $x_1(x_1^i)$ и $x_2(x_2^i)$.

Модель топологического пространства получается в результате композиции двух моделей

$$\mathcal{J}_{\tilde{\mathbb{R}}_n}(E_n)\cdot\mathcal{J}_{E_n}(T)=\mathcal{J}_{\tilde{\mathbb{R}}_n}(T) \tag{4}$$

3) Метрическое пространство. Как помним ([II] с. I7), метрическим пространством называется множество M элементов x, на квадрате которого определена числовая функция

$$M\times M \to \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

т.е. $\forall x,y\in M \to \rho(x,y)\in\mathbb{R}$ (6)

такая, что

$$\begin{aligned}
&1.\ \forall x,y\in M \quad \rho(x,y)\geq 0,\quad \rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y,\\
&2.\ \forall x,y\in M \quad \rho(x,y)=\rho(y,x),\\
&3.\ \forall x,y,z\in M \quad \rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)
\end{aligned} \tag{7}$$

(Как помним метрическими * пространствами являются: евклидово пространство, арифметическое евклидово пространство, гиперболическая плоскость Лобачевского Λ_2 ([II], с. 67), эллиптическая плоскость Римана ([II],с. 95) PS_2.

Чтобы доказать, что метрическое пространство является моделью топологического пространства, нужно в нем определить модель открытого множества и доказать выполнение аксиом топологического пространства. Поскольку метрическое пространство является обобщением евклидова пространства, то естественно определить в нем открытое множество также как в евклидовом (с.I0), заменив в определении ε -окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ (с.I0) точки x_0 меру евклидова расстояния $l(x,y)$ функцией $\rho(x,y)$.

Определение. ε -окрестностью $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 метрического пространства M называется множество точек x пространства M таких, что

$$\rho(x_0,x)<\varepsilon. \tag{8}$$

Определение. Открытым множеством U метрического пространства M называется такое его подмножество, что для любой его точки x_0 существует ее ε - окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ целиком ему принадлежащая

$$\exists\,\varepsilon \mid O_\varepsilon(x_0)\subset U. \tag{9}$$

Дословно как на с.I0) доказывается, что любая ε -окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ является открытым множеством.

Выполнение аксиом топологического пространства получается автоматически так же, как в случае евклидова пространства.

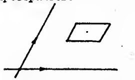
---

*) точнее квазиметрическими ([II], с. 52), но на с. 9 мы договорились согласно традиции величину и ее меру не различать.

Наиболее интересны неметрические пространства, являющиеся топологическими.

4) Арифметическое пространство $\mathbb{R}_n$ (не являющееся евклидовым без положительно определенной квадратичной формы (3)), т.е. просто пространство

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ \dots\ \times\mathbb{R}$$

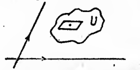


Тогда ε^i-окрестностью точки x_0^i (I0)

$$O_{\varepsilon^i}(x_0^i) \qquad \varepsilon^i\in\mathbb{R}^+ \quad \text{(II)}$$

назовем множество точек (x^i) таких, для которых $|x^i-x_0^i|<\varepsilon^i$, (I2)

и поэтому естественно открытым множеством U на $\mathbb{R}^n$ назвать такое



его подмножество, что любая его точка x_0^i имеет ε^i-окрестность $O_{\varepsilon^i}(x_0^i)$, содержащуюся в U.

Аксиомы I), 2) с. I3 для таким образом определенных открытых множеств очевидно выполняются. Докажем, что выполняется аксиома 3) пересечение конечного числа открытых множеств

$$\bigcap U_j = U \qquad \text{(I3)}$$

есть открытое множество. Пусть

$$x_0^i\in U, \qquad \text{(I4)}$$

тогда из $x_0^i\in U_j$ вытекает, что

$$\forall j\ \exists\,\varepsilon_j^i\ \mid\ O_{\varepsilon_j^i}(x_0^i)\subset U_j, \qquad \text{(I5)}$$

т.е. $\exists\,\varepsilon_j^i \mid\ |x^i-x_0^i|<\varepsilon_j^i \Longrightarrow x^i\in U_j$. (I6)

Пусть

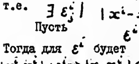
$$\varepsilon^i = \min(\varepsilon_1^i,\dots,\varepsilon_k^i) \qquad \text{(I7)}$$

Тогда для ε^i будет

$$|x^i-x_0^i|<\varepsilon^i \Rightarrow |x-x_0^i|<\varepsilon_j^i \Rightarrow (x^i)\in U_j \Rightarrow (x^i)\in U \Rightarrow O_{\varepsilon^i}(x_0^i)\subset U \qquad \text{(I8)}$$

т.е. множество U открытое.

5) Аффинное пространство A_n. Рассмотрим в качестве примера аффинную плоскость A_2. Будем ее воспринимать с точки зрения аксиоматики Вейля ([II], с. I7).



Для базиса $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ направляющего векторного пространства V_2 любой вектор $\vec{\varepsilon}$ с положительными координатами относительно базиса

$$\vec{\varepsilon}=\varepsilon^i\vec{e}_i\,, \qquad \varepsilon^i>0 \qquad \text{(I9)}$$

определяет для каждой точки $M_0\in A_2$ $\vec{\varepsilon}$-окрестность

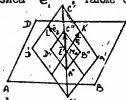
$$O_{\vec{\varepsilon},\vec{e}_i}(M_0) \qquad (20)$$

как внутренность параллелограмма, для которого точка M_0 -центр и

$$\vec{AC}=\vec{\varepsilon}, \quad \vec{AB}\parallel\vec{e}_1, \quad \vec{AD}\parallel\vec{e}_2 \qquad (2I)$$

Лемма. Если точка M_0 множества U аффинной плоскости A_2 имеет $\vec{\varepsilon}$ -окрестность относительно базиса $\vec{e}_i$ - $O_{\vec{\varepsilon},\vec{e}_i}(M_0)$, содержащуюся в U, то имеет и $\vec{\varepsilon}'$ - окрестность $O_{\vec{\varepsilon}',\vec{e}_i'}(M_0)$ относительно любого другого

базиса $\bar{e}_i'$, также содержащуюся в U.



Перенесем векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ в точку M_0

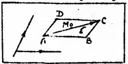
$$\overline{M_0K} = \bar{e}_1', \quad \overline{M_0L} = \bar{e}_2' \tag{22}$$

Через точки K, L и им противоположные относительно точки M_0 проведем прямые параллельные $\bar{e}_1'$ и $\bar{e}_2'$, получим параллелограмм $A'B'C'D'$. Уменьшая его гомотетично с центром в точке M_0, получим параллелограмм $A''B''C''D''$, целиком принадлежащий $ABCD$ и, значит, U. Его диагональ дает вектор $\bar{\varepsilon}'$.

Определение. Подмножество U аффинной плоскости A_2 называется открытым, если для любой его точки M_0 относительно любого базиса $\bar{e}_i$ существует ее $\bar{\varepsilon}$ -окрестность $O_{\bar{\varepsilon},\bar{e}_i}(M_0)$ целиком принадлежащая U.

Теорема. Аффинная плоскость с таким образом определенными открытыми множествами в нем является моделью топологического пространства.

Поскольку открытость множества U относительно одного базиса



приводит к его открытости относительно любого другого, то можно считать все открытые множества U_i открытыми относительно одного и того же базиса $\bar{e}_i$ и $\bar{\varepsilon}$ - окрестность относительно этого базиса $O_{\bar{\varepsilon},\bar{e}}(M_0)$ обозначим просто $O_{\bar{\varepsilon}}(M_0)$. Возьмем любую аффинную систему координат $\mathcal{R}\{O,\bar{e}_i\}$ с этим базисом $\bar{e}_i$. Тогда относительно него устанавливается взаимно однозначное соответствие между A_2 и $\mathbb{R}_2$

$$A_2 \longleftrightarrow \mathbb{R}_2 \tag{23}$$

обычным образом

$$\forall M \longrightarrow x^i \mid \overline{OM} = x^i \bar{e}_i, \tag{24}$$

причем если точка M принадлежит $\bar{\varepsilon}$ -окрестности точки $M_0(x_0^i)$ относительно $\{\bar{e}_i\}$ и ε^i - координаты вектора $\bar{\varepsilon}$

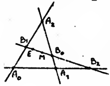
$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^i \bar{e}_i, \quad \varepsilon^i > 0 \tag{25}$$

то

$$|x - x_0^i| < \varepsilon^i, \tag{26}$$

т.е. $\bar{\varepsilon}$ -окрестность $O_{\bar{\varepsilon}}(M_0)$ плоскости A_2 отобразится в ε^i-окрестность плоскости $\mathbb{R}_2$ (с.15), открытое множество плоскости A_2 -в открытое множество плоскости $\mathbb{R}_2$, а поскольку $\mathbb{R}_2$ топологическое пространство, то и A_2 - топологическое.

6) Проективное пространство P_n. Рассмотрим, например, проективную плоскость P_2. Как известно ([I], с. 102) три точки A_i $(i=0,1,2)$,



не принадлежащие одной прямой определяют на проективной плоскости четыре треугольника $\Delta_\alpha A_i$. Любая точка E, не принадлежащая прямым (A_iA_j), лежит в одном из них, его и назовем A_i -окрестностью $O_{A_i}(E)$ точки E: $O_{A_i}(E) = \{M \mid ME \div B_iB_j\}$

где $B_i = (ME) \cap (A_jA_k)$, $i,j,k = 0,1,2$, $(i,j,k) = (0,1,2)$ (27)

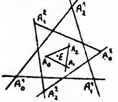
Множество U назовем открытым, если для любой его точки E существует треугольник ΔA_i такой, что $O_{A_i}(E) \subset U$. (28)

Докажем, что пересечение двух открытых множеств U_1, U_2 – открыто.

Пусть $E \in U = U_1 \cap U_2$, (29)

тогда $E \in U_1,\ E \in U_2$ (30)

Рассмотрим треугольники $\Delta_E A_i^1$ и $\Delta_E A_i^2$, содержащиеся в U_1 и U_2, и содержащие точку E. Поскольку они имеют общую точку E, то в силу аксиом проективной геометрии они содержат общий треугольник $\Delta_E A_i$, содержащий точку E. Тогда



$$\Delta_E A_i \subset \Delta_E A_i^1 \subset U_1,\quad \Delta_E A_i \subset \Delta_E A_i^2 \subset U_2, \tag{31}$$

откуда

$$\Delta_E A_i \subset U, \tag{32}$$

т.е. U – открыто.

§ 5. Непрерывность, гомеоморфизм, окрестность

Тем самым топология по П.С.Александрову состоит из определений и предложений, выраженных при помощи математико-логических и теоретико-множественных терминов через понятие открытых множеств, в частности

Определение. Отображение топологического пространства T в топологическое пространство T'

$$T \to T' \tag{1}$$

называется непрерывным, если (с.12) полный прообраз каждого открытого множества пространства T' является открытым в T.

Определение. Отображение топологического пространства T в топологическое пространство T' называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначное и взаимно непрерывное.

Определение. Окрестностью точки x_0 топологического пространства T называется всякое открытое множество U, ее содержащее

$$x_0 \in U \subset T. \tag{2}$$

§ 6. База топологического пространства, топологическое подпространство, произведение двух топологических пространств

Определение. Базой топологического пространства T называется подмножество его открытых множеств такое, что всякое открытое множество является их объединением. Если это подмножество конечно или счетно, то база называется соответственно конечной или счетной.

Например, евклидово арифметическое пространство R_n (с.13) имеет счетную базу из открытых шаров $B(O,r)$ с рациональными центрами $O(x_0^i)$ и рациональными радиусами r

$$x_0^i \in Q,\quad r \in Q. \tag{1}$$

Арифметическое пространство $\mathbb{R}_n$ (с.I5) имеет счетную базу из всех открытых кубиков $\{x^i \mid |x^i - a^i| < r\}$ (с.I5), где a^i и r рациональны.

По одним топологическим пространствам можно строить другие.

Как мы видели на с.I2, открытые множества пространства X, принадлежащего евклидову пространству E_n (т.е. его топология) являются пересечением с X открытых множеств пространства E_n.

Аналогичное получаем для любого топологического пространства T и любого его подмножества A.

Теорема I. Всякое подмножество A топологического пространства T становится топологическим пространством, если в качестве открытых его множеств u взять пересечения открытых множеств пространства T с A

$$u = U \cap A. \tag{2}$$

Доказательство тривиально.

Определение. Полученная таким образом топология на $A \subset T$ называется индуцированной топологией от топологии пространства T, а топологическое пространство A с этой топологией - вложенным в топологическое пространство T.

Если говорится о топологии подмножества топологического пространства и не оговорено другое, то подразумевается индуцированная топология на нем.

Теорема 2. Если T_1 и T_2 -топологические пространства, то декартово произведение их ([II],с. 8)

$$T = T_1 \times T_2 \tag{3}$$

будет топологическим пространством, если для него в качестве базы открытых множеств брать декартовы произведения открытых множеств U_i^1 и U_j^2 пространств T_1 и T_2

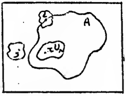
$$U_{ij} = U_i^1 \times U_j^2. \tag{4}$$

Доказательство тривиально.

§ 7. Граничные точки, точки прикосновения, предельные точки для подмножества топологического пространства

Пусть T -топологическое пространство и A -его подмножество

$$A \subset T. \tag{I}$$



Определение. Точка x называется внутренней по отношению к подмножеству A, если существует открытое множество U_x, содержащее x (окрестность точки x) и содержащееся в A

$$x \in U_x \subset A. \tag{2}$$

Тем самым

$$x \in A. \tag{3}$$

Таким образом, если подмножество A -само открытое, то каждая его точка - внутренняя.

Определение. Совокупность внутренних точек множества $A \subset T$ называется внутренностью или ядром $\breve{A}$ множества A. Тогда получаем:

Теорема. Для того, чтобы множество $A \subset T$ было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим ядром (своей внутренностью)
$$A = U \iff A = \breve{A} \qquad (4)$$

Определение. Точка y называется внешней по отношению к подмножеству A, если существует ее окрестность U_λ, не пересекающаяся с A.
$$\exists U_\lambda \mid U_\lambda \ni y, \quad U_\lambda \subset T \setminus A. \qquad (5)$$

Определение. Точка z называется граничной по отношению к множеству A, если любая ее окрестность пересекается (не по пустому множеству) как с A, так и с его дополнением до всего пространства T
$$\forall U \ni z \quad U \cap A \neq \emptyset, \quad U \cap T \setminus A \neq \emptyset. \qquad (6)$$

Граничные точки могут принадлежать множеству A, а могут и не принадлежать ему.

Множество граничных точек множества A называется границей его и обозначается ∂A (иногда $\ell(A)$).

Очевидно, что любое множество A и его дополнение $T \setminus A$ имеют общую границу
$$\partial A = \partial (T \setminus A). \qquad (7)$$

Определение. Точка m называется точкой прикосновения для множества A, если любая ее окрестность пересекается с A.

Таким образом точками прикосновения являются внутренние точки и граничные точки $\{m\} = \{x, z\}$

Определение. Замыканием $\bar{A}$ множества A называется множество точек его прикосновения. Значит
$$\bar{A} = A^\circ \cup \partial A. \qquad (8)$$

Определение. Точка t называется предельной точкой для множества A, если любая ее окрестность, содержит точку множества A, отличную от нее самой (т.е. проколотая по t любая окрестность точки t пересекается с A). Она также, как и точка прикосновения, может принадлежать, а может и не принадлежать самому множеству A.

Таким образом точка прикосновения множества A, если не является предельной, то обязательно принадлежит самому множеству A.

Определение. Множество предельных точек множества A называется производным множеством A' множества A.

Очевидно
$$\bar{A} = A \cup A', \qquad (9)$$
откуда
$$\bar{A} \supset A, \quad \bar{A} \supset A' \qquad (10)$$
и
$$A = \bar{A} \iff A \supset A'. \qquad (11)$$

Определение. Точка множества A, не являющаяся его предельной точкой, называется изолированной точкой.

§ 8. Замкнутые множества

Определение. Подмножество F топологического пространства T называется замкнутым множеством в T, если его дополнение $T\setminus F$ - открытое множество.

Основные свойства замкнутых множеств легко получаются из их определения. Ими будут:

I) Само топологическое пространство T и пустое множество $\varnothing$ - замкнуты;

2) Пересечение любого числа замкнутых множеств - замкнуто;

3) Объединение конечного числа замкнутых множеств -замкнуто.

Действительно, свойство 2) следует из того, что дополнение к пересечению множеств есть объединение дополнений к ним

$$T\setminus(F_1\cap F_2) = (T\setminus F_1)\cup(T\setminus F_2) \tag{I}$$

и основного свойства 2) (с.I3)открытых множеств.

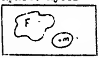
Свойство 3) следует из того, что дополнение к объединению множеств есть пересечение дополнений их

$$T\setminus(F_1\cup F_2) = (T\setminus F_1)\cap(T\setminus F_2) \tag{2}$$

и основного свойства 3) (с.I3) открытых множеств.

Теорема. Для того, чтобы подмножество F топологического пространства T было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы все его точки прикосновения ему принадлежали.

Необходимость. Пусть F -замкнуто, тогда его дополнение $T\setminus F$ открыто. Пусть m -точка прикосновения множества F. Если бы она



не принадлежала F, то она принадлежала бы его дополнению $T\setminus F$, а поскольку последнее открыто и не пересекается с F

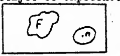
$$T\setminus F\cap F=\varnothing, \tag{3}$$

то получаем противоречие с определением точки прикосновения.

Достаточность. Пусть любая точка прикосновения m множества F топологического пространства T принадлежит ему. Рассмотрим любую точку n, принадлежащую дополнению множества F

$$\forall\, n\in T\setminus F. \tag{4}$$

Она не будет по предположению точкой прикосновения F, значит существует ее окрестность U_λ, не пересекающаяся с F, т.е. целиком принадлежащая $T\setminus F$



$$\exists\, U_\lambda \mid \quad n\in U_\lambda\subset T\setminus F \tag{5}$$

и так для каждой точки n из $T\setminus F$. Объединение этих открытых множеств U_λ будет открытым в силу 2) (с.I3) и совпадать с $T\setminus F$, т.е. $T\setminus F$ -открыто, а значит, F -замкнуто.

Следствие. Замкнутое множество совпадает со своим замыканием

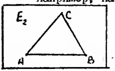
$$F=\bar{F}. \tag{6}$$

Теорема. Замыкание $\bar{A}$ любого множества A -замкнутое множество.

Пусть $\bar{x}$ -точка прикосновения замыкания $\bar{A}$, докажем, что она принадлежит $\bar{A}$
$$(\bar{\bar{A}}) = \bar{A}: \quad . \quad \bar{x} \in (\bar{\bar{A}}) \Rightarrow \bar{x} \in \bar{A} \qquad (7)$$

Поскольку $\bar{x}$ -точка прикосновения $\bar{A}$, то в любой ее окрестности $U_{\bar{x}}$ имеется точка x принадлежащая $\bar{A}$
$$\forall U_{\bar{x}} \ \exists \ \dot{x} \in U_{\bar{x}} \mid x \in \bar{A}, \qquad (8)$$
тем самым открытое множество $U_{\bar{x}}$ будет окрестностью и для этой точки x
$$U_{\bar{x}} = U_x \qquad (9)$$
тогда, поскольку $x \in \bar{A}$, окрестность U_x пересекается с A
$$U_x \cap A \neq \varphi \Rightarrow U_{\bar{x}} \cap A \neq \varphi \qquad (10)$$
точка $\bar{x}$ является точкой прикосновения для самого множества A, т.е. принадлежит его замыканию $\bar{x} \in \bar{A}$ (11)

Например, на евклидовой плоскости E_2 множество внутренних точек треугольника $\triangle ABC$ образует открытое множество. Граничные точки - это точки сторон и вершины. Таким образом, открытый треугольник со сторонами и вершинами образует замыкание открытого треугольника, и значит, является замкнутым множеством в E_2.

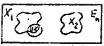


§ 9. Связность

Рассмотрим подмножество X на E_2. Когда его назвать связным? Тогда, когда оно не является несвязным. В таком случае, когда оно является несвязным? Очевидно тогда, когда его можно представить в виде объединения двух кусков X_1, X_2 достаточно удаленных друг от друга, т.е. для любой точки каждого из них найдется ε - окрестность $O_\varepsilon(x_i)$, не пересекающаяся с другим куском.

Как же это выразить через открытые множества u пространства X с индуцированной топологией от топологии E_n, чтобы можно было бы определение несвязного множества X перенести на общее топологическое пространство T? Как помним (с.12) для пространства $X \subset E_n$ ε -окрестностью точки x_0 - $o_\varepsilon(x_0)$ является пересечение ε -окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 в E_n с X
$$o_\varepsilon(x_0) = O_\varepsilon(x_0) \cap X = O_\varepsilon(x_0)|_X \qquad (1)$$
и индуцированная топология состоит из открытых множеств
$$u = U_X \subset X \qquad (2)$$
таких, что
$$\forall x_0 \ \exists \ o_\varepsilon(x_0) \subset u. \qquad (3)$$

С другой стороны, если X несвязно: распадается на куски X_1, X_2, удовлетворяющие вышеуказанному условию, то для любой точки x_0 каждого из них существует ε -окрестность $o_\varepsilon(x_0)$ не пересекающаяся с другим



$$\forall x_0 \in X_i \ \exists\, O_\varepsilon(x_0) \mid O_\varepsilon(x_0) \cap X_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2 \qquad (4)$$

ибо

$$O_\varepsilon(x_0) \cap X_j = (O_\varepsilon(x_0) \cap X) \cap X_j = O_\varepsilon(x_0) \cap (X \cap X_j) = O_\varepsilon(x_0) \cap X_j = \emptyset. \qquad (5)$$

Тогда можно доказать теорему.

Теорема. Для того, чтобы множество $X \subset E_n$ было несвязным необходимо и достаточно, чтобы его можно было бы представить в виде объединения двух открытых в X , непересекающихся и непустых множеств X_1, X_2:

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_i = u_i, \quad u_1 \cap u_2 = \emptyset, \quad u_i \neq \emptyset, \quad i = 1,2 \qquad (6)$$

Необходимость. Поскольку

$$\forall x_0 \in X_i \ \exists\, O_\varepsilon(x_0) \in X_i, \qquad (7)$$

то

$$\bigcup O_\varepsilon(x_0) = X_i. \qquad (8)$$

Тогда, поскольку $O_\varepsilon(x_0)$ открыто в X (с.12, 10), то в силу 2)(с.13) из (8) следует, что X_i открыто в X , т.е. (6_2). Поскольку

$$O_\varepsilon(x_0) \cap X_j = \emptyset, \qquad (9)$$

то из (8) следует (6_3)

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset. \qquad (10)$$

Поскольку $X_i \neq \emptyset$, то получаем (6_4).

Достаточность. В силу (6_1) и (6_2)

$$\forall x_0 \in X_i \ \exists\, O_\varepsilon(x_0) \subset X_i \Rightarrow O_\varepsilon(x_0) \cap X_j = \emptyset, \qquad (11)$$

т.е. в силу (6_1) имеем (4), т.е. X несвязно в евклидовом смысле.

Эта теорема дает оправдание такому определению.

Определение. Топологическое пространство T называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств

$$T = U_1 \cup U_2 \mid \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \ U_1 \neq \emptyset, \ U_2 \neq \emptyset \qquad (12)$$

Определение. Топологическое пространство называется связным, если оно не является несвязным, т.е. его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Определение. Множество A топологического пространства T называется связным в T , если оно связно как топологическое подпространство.

Замечание. Если A связно в T и $A \subset B \subset T$, то A связно в B

Найдем некоторые признаки связности топологического пространства.

Лемма. Если множество M топологического пространства T пересекается существенно с двумя непересекающимися между собой его открытыми непустыми множествами U_1 и U_2 и принадлежит их объединению

$$M, U_1, U_2 \subset T, \qquad (13)$$

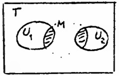
$$M \subset U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \neq \emptyset, \ U_2 \neq \emptyset, \qquad (14)$$

$$u_1 = M \cap U_1 \neq \emptyset, \quad u_2 = M \cap U_2 \neq \emptyset, \qquad (15)$$

то оно несвязно.

Действительно, в силу (14_1)

$$M=(M\cap U_1)\cup(M\cap U_2). \qquad (16)$$



Поскольку по определению индуцированной топологии на M множества u_1, u_2 (15) открыты в нем и в силу (15), (14_2) они не пересекаются

$$u_1\cap u_2=\varnothing, \qquad (17)$$

то из непустоты (15) следует, что M -несвязно.

Следствие. Если связное множество M топологического пространства T принадлежит объединению двух непересекающихся между собой открытых его множеств U_1, U_2, то оно принадлежит одному из них

$$M\subset U_1 \quad \vee \quad M\subset U_2. \qquad (18)$$

Теорема. Если для любых двух точек x_1, x_2 топологического пространства T существует связное множество $C(x_1,x_2)$ пространства T, их содержащее

$$\{x_1, x_2\}\subset C(x_1,x_2)\subset T, \qquad (19)$$

то пространство T - связно.

Если бы T - было несвязно, то его можно было бы представить в виде $T=U_1\cup U_2 \mid \quad U_1\cap U_2=\varnothing, \quad U_1\neq\varnothing, \quad U_2\neq\varnothing,$ (20)

где U_i -открыты. В силу (20_3), (20_4) существуют точки x_1, x_2 в этих U_1, U_2

$$x_1\in U_1, \qquad x_2\in U_2. \qquad (21)$$

По условию теоремы существует связное множество $C(x_1,x_2)$, содержащее их. В силу (21), (19)

$$u_1=C\cap U_1\neq\varnothing, \qquad u_2=C\cap U_2\neq\varnothing \qquad (22)$$

и поэтому по лемме C несвязно, что противоречит условию.

Определение. Топологическое пространство T называется линейно связным, если для любых двух его точек x_1, x_2 существует простая линия ([8], с.42) с концами в этих точках и содержащаяся в T (Напомним, что простой линией с концами в точках x_1, x_2 называется гомеоморфный образ отрезка в E_1 с его концами.)

Следствие. Всякое линейно связное топологическое пространство T связно (ибо простая линия связна). Обратное не всегда верно.

Найдем некоторые свойства связных множеств.

Теорема. Объединение двух пересекающихся связных множеств A и B пространства T связно.

Если бы $A\cup B$ было несвязно, то его можно было бы представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых в $A\cup B$ множеств u_1 и u_2

$$A\cup B=u_1\cup u_2, \quad u_1\cap u_2=\varnothing, \quad u_1\neq\varnothing, \quad u_2\neq\varnothing \qquad (23)$$

тогда

$$A\subset u_1\cup u_2, \quad B\subset u_1\cup u_2, \qquad (24)$$

и в силу леммы для $T_1 = u_1 \cup u_2$ множества A и B принадлежат либо u_1 либо u_2. Одному u_i они не могут принадлежать, ибо тогда получили бы противоречие с (23_1) и непустотой u_2 (23_v). Если же

$$A \subset u_1, \quad B \subset u_2, \tag{25}$$

то из (23_2) получим, что A и B не пересекаются

$$A \cup B = \emptyset, \tag{26}$$

что противоречит условию. Значит $A \cup B$ связно.

<u>Следствие I.</u> Объединение любого числа связных множеств A_i пространства T, каждое из которых пересекается с каждым, - связно.

<u>Определение.</u> Открытое связное множество называется <u>областью</u> Γ.

Поскольку в топологии, индуцированной топологией топологического пространства T на его открытом множестве $U \subset T$, открытыми множествами u_i являются пересечения открытых множеств $U_i \subset T$ с его открытым множеством U

$$u_i = U_i \cap U, \tag{27}$$

то открытыми множествами множества U являются в силу 3) (с.13) открытые множества самого T. Поэтому получаем теорему

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы открытое множество $U \subset T$ было связно (т.е. было областью)

$$U = \Gamma, \tag{28}$$

необходимо и достаточно, чтобы его <u>нельзя</u> было представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств в T

$$U = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \neq \emptyset, \; U_2 \neq \emptyset. \tag{29}$$

<u>Следствие.</u> Если открытое множество $A \subset T$ несвязно, то его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых в T множеств.

Если топологическое пространство T несвязно, т.е. его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств

$$T = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \neq \emptyset, \quad U_2 \neq \emptyset, \tag{30}$$

то для каждого составляющего множества U_i другое U_j будет дополнением

$$U_1 = T \setminus U_2, \qquad U_2 = T \setminus U_1 \tag{31}$$

и потому (с.20) замкнуто. Верно и обратное. Таким образом можно дать такие эквивалентные определения несвязности.

<u>Определение I.</u> Топологическое пространство T называется несвязным, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств

$$T = F_1 \cup F_2 \,|\, F_1 \cap F_2 = \emptyset, \quad F_1 \neq \emptyset, \quad F_2 \neq \emptyset \tag{32}$$

<u>Определение 2.</u> Топологическое пространство называется <u>несвязным</u>, если существует отличное от него непустое его подмножество одновре-

менно открытое и замкнутое.

Следствие. Теорема с.24 и следствие из нее верны, если в них заменить слово "открытое" на слово "замкнутое".

Если топологическое пространство T несвязно, т.е. его можно представить в виде двух непустых открытых (и замкнутых) непересекающихся множеств

$$T = U_1 \cup U_2, \tag{33}$$

то рассмотрим каждое из этих составляющих множеств U_1, U_2. Если они связны, т.е. являются областями

$$U_i = \Gamma_i, \tag{34}$$

то пространство T будет объединением двух непересекающихся областей

$$T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{35}$$

Если одно из U_i или оба вместе несвязны - их можно представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств

$$U_i = U_{i1} \cap U_{i2}, \quad U_{i1} \cap U_{i2} = \phi, \tag{36}$$

то T будет объединением трех или четырех непересекающихся открытых множеств

$$T = \cup U_{ij}, \quad U_{ij} \cap U_{kl} = \phi \tag{37}$$

и т.д. Естественно поставить вопрос - приводит ли этот процесс всегда к объединению связных открытых (или замкнутых) множеств, т.е. любое ли топологическое пространство T можно представить в виде объединения открытых Γ_i (или замкнутых) Φ_i связных множеств

$$T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_k \ldots \qquad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi, \tag{38}$$

$$T = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \ldots \cup \Phi_k \ldots \qquad \Phi_i \cap \Phi_j = \phi. \tag{39}$$

Оказывается, несмотря на видимую равноправность (с.22, с.24) для несвязного пространства T открытых и замкнутых множеств, ответ для них различен: для открытых невсегда, а для замкнутых - всегда.

Первое доказывается противоречущим примером. Докажем второе.

Определение. Компонентой C_x данной точки x топологического пространства T называется максимальное связное подмножество пространства T, содержащее точку x (максимальное в том смысле, что всякое другое связное множество, содержащее x, содержится в нем).

Теорема. Каждая точка x топологического пространства T имеет непустую компоненту.

Во-первых, объединение всех связных множеств пространства T, содержащих данную точку x, связно (т.к. каждое из них с каждым пересекается по крайней мере по точке x и в силу следствия с.24) и максимально, ибо всякое связное множество, содержащее точку x, входит в это объединение.

Тем самым для каждой точки $x \in T$ существует ее компонента C_x

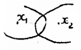
Во-вторых, компонента любой точки x - непуста, т.к. в объеди-

нение связных множеств, содержащих точку x входит множество заведомо непустое и связное, а именно множество, состоящее из этой точки.

Следствие. Каждое связное множество A топологического пространства T принадлежит одной компоненте. Действительно, рассмотрим компоненту C_x любой точки x множества A. В силу определения компоненты

$$C_x \supset A. \tag{40}$$

Теорема. Компоненты различных точек топологического пространства T либо совпадают, либо не пересекаются.



Рассмотрим компоненты C_{x_1}, C_{x_2} двух точек x_1 и x_2. Если бы они не совпадали и пересекались то в силу теоремы с.23 их объединение было связно и содержало каждую компоненту, что противоречит максимальности компоненты.

Следствие. Любое топологическое пространство распадается на непересекающиеся компоненты

$$T = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_\kappa \dots, \qquad C_i \cap C_j = \varphi. \tag{41}$$

Остается доказать, что компоненты замкнуты.

Теорема. Если множество $A \subset T$ связно в T, то и его замыкание $\bar A$ (с.19) связно в T.

Если бы $\bar A$ было несвязно в T, то оно являлось бы объединением двух непустых непересекающихся открытых (и замкнутых) в $\bar A$ (с.22, с.24) множеств f_1, f_2

$$\bar A = f_1 \cup f_2, \quad f_1 \cap f_2 = \varphi, \quad f_1 \neq \varphi, \quad f_2 \neq \varphi. \tag{42}$$

Тогда (с.19)

$$A \subset \bar A \implies A \subset f_1 \cup f_2 \tag{43}$$

т.е. связное в T, а значит в силу замечания с.22 связное в $\bar A$ множество A принадлежало бы объединению двух непересекающихся непустых открытых (и замкнутых) в $\bar A$ множеств f_1, f_2, откуда в силу следствия с.23 принадлежало бы одному из них, например, f_1

$$A \subset f_1, \tag{44}$$

а потому их замыкания в $\bar A$: $\bar{\bar A}$ и $\bar f_1$ также принадлежат друг другу

$$\bar{\bar A} \subset \bar f_1, \tag{45}$$

но из замкнутости f_1 в $\bar A$ следует

$$\bar f_1 = f_1 \tag{46}$$

а замыканием A в $\bar A$ очевидно будет само $\bar A$ $(\bar A \cap \bar A = \bar A)$:

$$\bar{\bar A} = \bar A, \tag{47}$$

поэтому из (45),(46),(47) будем иметь

$$\bar A \subset f_1, \tag{48}$$

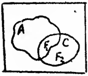
что противоречит (42_1), (42_4).

Следствие. Любая компонента топологического пространства замкнута, ибо в противном случае ее замыкание было бы связным множеством, содержащим ее, что противоречит ее максимальности.

Теорема. Если открытое и замкнутое множество A, топологического пространства T

$$A\subset T \tag{49}$$

пересекается с его компонентой C, то оно ее содержит



$$F_1 = A\cap C \neq \varnothing \Rightarrow A\supset C \tag{50}$$

Действительно, если бы

$$F_1 \neq C \tag{51}$$

то пересечение $T\setminus A$ и C было бы не пусто

$$F_2 = T\setminus A \cap C = C\setminus F_1 \neq \varnothing. \tag{52}$$

Поскольку $A, C, T\setminus A$ замкнуты, то и F_1, F_2 из (50), (52) замкнуты и для C имеем

$$C = F_1 \cup F_2, \qquad F_1\cap F_2 = \varnothing \tag{53}$$

что противоречит тому, что компонента C связна (с.25).

Следствие. Если непустое множество A топологического пространства T одновременно открыто и замкнуто в нем, то оно является объединением нескольких его компонент.

Определение. Если число компонент p_0 топологического пространства T конечно

$$p_0\in N \tag{54}$$

то оно называется его порядком несвязности.

Порядок несвязности, очевидно, является топологическим инвариантом.

Теорема. Если число компонент топологического пространства конечно, то оно является объединением непересекающихся областей.

Действительно, в силу теоремы (с.25) топологическое пространство T является объединением его компонент

$$T = C_1\cup C_2\cup \dots \tag{55}$$

В силу условия нашей теоремы каждая компонента C_i будет открытым множеством, ибо является дополнением до T объединения (p_0-1) т.е. конечного числа замкнутых множеств, т.е. дополнением в силу 3)(с.20) до T замкнутого множества.

Тогда, поскольку каждая компонента связна, она является областью.

Поскольку связность топологического пространства T определяется через понятие открытого множества, а открытость (с.17) сохраняется при гомеоморфизмах, то она является топологическим инвариантом, и значит, принадлежит к топологической теории.

§ 10. Хаусдорфсость (отделимость)

Определение. Топологическое пространство T называется отделимым (по Хаусдорфу) если для любых двух его точек x_1, x_2 существуют их непересекающиеся окрестности

$$x_1\in U_1,\ x_2\in U_2 \mid U_1\cap U_2 = \varnothing. \tag{I}$$

Например, моделью неотделимого (не хаусдорфова) топологического пространства будет такое. На аффинной плоскости в выделенным

репером $\mathcal{R}\{O,\bar{e}_i\}$, т.е. на $\mathbb{R}_2(x^1x^2)$ открытыми множествами будем считать полосы без краев, параллельные оси x^2 и их объединения

$$(x^1)\subset(a,b)\iff a<x^1<b \qquad (2)$$

Аксиомы топологического пространства (с.13) будут выполняться, но для двух точек с одним x^1

$$x_1(x_1^1,x_1^2) \quad \text{и} \quad x_2(x_2^1,x_2^2)\,,\ x_1^1=x_2^1 \qquad (3)$$

нельзя найти непересекающиеся содержащие их полосы.

§ 11. Компактность топологического пространства

<u>Определение</u>. <u>Покрытием</u> данного топологического пространства T называется совокупность некоторых его подмножеств, объединение которых дает пространство T.

Если эти подмножества открытые, то покрытие называется <u>открытым</u>.

Например, база топологического пространства (с.17) является его открытым покрытием.

Открытое покрытие, состоящее из всех открытых множеств топологического пространства T называется <u>основным</u> покрытием T.

<u>Определение</u>. Покрытие топологического пространства T называется конечным (счетным), если содержит конечное (счетное) множество своих подмножеств.

<u>Определение</u>. <u>Подпокрытием</u> данного покрытия топологического пространства T называется такое подмножество множеств покрытия, которое само является покрытием.

Например, база топологического пространства T является подпокрытием любого открытого его покрытия.

<u>Определение</u>. Покрытие B с элементами b_i называется вписанным в покрытие A с элементами a_j, если для любого множества b_i из B найдется множество a_j из A, содержащее b_i

$$\forall b_i \ \exists a_j \mid b_i\subset a_j \qquad (1)$$

Тем самым, подпокрытие всегда вписано в покрытие, и, значит, база вписана в любое открытое покрытие топологического пространства.

Оглядываясь на евклидово пространство, вспомним лемму Бореля-Лебега о подпокрытиях ограниченного и замкнутого множества арифметического пространства $\mathbb{R}_n$

<u>Определение</u>. Множество M арифметического пространства $\mathbb{R}_n$

$$M\subset\mathbb{R}_n \qquad (2)$$

называется ограниченным в нем, если существует параллелепипед $(a^i b^i)$

$$\{x^i \mid a^i<x^i<b^i\}, \qquad (3)$$

содержащий его.

Определение. Множество M арифметического пространства $\mathbb{R}_n$ называется замкнутым в нем, если оно замкнуто как подмножество топологического пространства, т.е. (с.20) дополнение $\mathbb{R}_n \setminus M$ – открыто.

Лемма Бореля-Лебега. Если множество M арифметического пространства $\mathbb{R}_n$ ограничено и замкнуто, то из любого его открытого (индуцированного) покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

И обратно, если из любого открытого (индуцированного) покрытия множества $M \subset \mathbb{R}_n$ можно выделить конечное подпокрытие, то оно ограничено и замкнуто.

Мы видим, что одна часть леммы существенно зависит от (ограниченность), а другая – чисто топологическая (выражается через топологические понятия). Поэтому естественно дать определение таким топологическим пространствам.

Определение. Топологическое пространство называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема. Всякое бесконечное подмножество компактного топологического пространства T имеет предельную точку, (хотя бы одну).

Предположим противное, что у компактного пространства T существует бесконечное множество

$$M \subset T \tag{4}$$

такое, что ни одна точка x_i пространства T не является для него предельной, т.е. для любой точки x_i существует открытое в T множество U_i, содержащее точку x_i и содержащее из точек множества M самое большее одну точку x_i, если она принадлежит M.

$$\forall x_i \in T \;\; \exists U_i \ni x_i \mid \quad (U_i \cap M) \leq \text{I точка} \tag{5}$$

Поскольку точки x_i заполняют пространство T, то соответствующие множества U_i образуют его открытое покрытие

$$\cup U_i = T. \tag{6}$$

В силу компактности T из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие

$$U_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

и, значит

$$\{U_\alpha\} = \{U_i\} = T. \tag{8}$$

но поскольку в каждом U_α лежит от M самое большее I точка и их конечное число n, то получаем противоречие с бесконечностью множества M.

Оказывается, что в случае счетности базы пространства T верна и обратная теорема: если всякое бесконечное подмножество топологического пространства T имеет хотя бы одну предельную точку, то оно компактно

Оказывается также, что компактность сохраняется при любом непрерывном отображении (а не только при гомеоморфизме ([21], с. 60).

§ 12. Другие аксиоматики топологического пространства

Определение топологического пространства через открытые его множества оказалось самым гибким и эффективным. Но к нему пришли не сразу. Сначала были более наглядные аксиоматики, более непосредственно обобщающие топологию евклидова пространства.

Здесь нужно в первую очередь отметить аксиоматику Хаусдорфа [25] через ε*)- окрестности точек и аксиоматику Рисса [23] через близость точек к множеству.

I) Аксиоматика Хаусдорфа топологического пространства T^X

Неопределяемыми объектами являются точки, неопределяемым отношением - ε -окрестности точек (не путать с окрестностью в топологических пространствах по Александрову!) - подмножества в T

$$\rho \subset \mathcal{P}(T) \tag{1}$$

такие, что каждой точке

$$x \in T \tag{2}$$

соответствуют некоторые из них $\varepsilon_i(x)$ такие, что выполняются аксиомы:

X1) ε -окрестность каждой точки x ее содержит

$$\varepsilon_i(x) \ni x; \tag{3}$$

X2) Если точка y принадлежит какой-нибудь ε -окрестности $\varepsilon_i(x)$ точки x, то существует ее ε -окрестность $\varepsilon_j(y)$, принадлежащая $\varepsilon_i(x)$

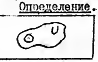
$$\forall y \in \varepsilon_i(x) \;\; \exists\, \varepsilon_j(y) \subset \varepsilon_i(x); \tag{4}$$

X3) Для любых двух ε -окрестностей одной точки x : $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ существует ε -окрестность $\varepsilon_3(x)$, принадлежащая их пересечению

$$\forall \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \;\; \exists\, \varepsilon_3(x) \mid \;\; \varepsilon_3(x) \subset \varepsilon_1(x) \cap \varepsilon_2(x). \tag{5}$$

Тогда естественно обобщая определение открытого множества в евклидовом (метрическом) пространстве (с.10), получим определение.

Определение. Множество U в T^X называется открытым, если для каждой его точки x существует ε -окрестность, ему принадлежащая



$$\forall x \in U \;\; \exists\, \varepsilon(x) \subset U. \tag{6}$$

Замечание 1. Из X2) вытекает, что всякая ε-окрестность сама является открытым множеством.

Замечание 2. Всякое открытое множество является объединением -окрестностей своих точек.

Теорема. В силу аксиом Xi) открытые множества удовлетворяют аксиомам Александрова топологического пространства T^A (с.13), т.е. определяют модель $\mathcal{J}_{T^X}(T^A)$

---

*) Здесь ε -не действительное число, а просто буква греческого алфавита, используемая для обозначения окрестности по Хаусдорфу

Действительно, то, что объединение открытых множеств - открыто, почти очевидно. Докажем, что пересечение конечного числа открытых множеств - открыто. Рассмотрим пересечение двух открытых множеств U_1, U_2

$$U = U_1 \cap U_2. \tag{7}$$

Если x - любая точка пересечения U, то

$$x \in U_i \qquad i = 1,2. \tag{8}$$

Но в силу определения открытого множества существуют ε -окрестности точки x, соответственно принадлежащие множествам U_1, U_2

$$\exists \; \varepsilon_i(x) \subset U_i \qquad i=1,2 \tag{9}$$

Тогда в силу аксиомы Х3 существует ε_3 -окрестность точки x, принадлежащая их пересечению

$$\exists\, \varepsilon_3(x) \subset \varepsilon_1(x) \cap \varepsilon_2(x). \tag{10}$$

Поэтому в силу (9),(7)

$$\varepsilon_3(x) \subset U, \tag{11}$$

т.е. U -открыто. Отсюда следует искомое.

Чтобы доказать эквивалентность аксиоматик Александрова и Хаусдорфа топологического пространства, нужно еще построить в теории топологии Александрова модель аксиоматики Хаусдорфа ([II] ,с.26)

$$\mathfrak{I}_{T^A}(T^X) \tag{12}$$

и доказать их согласованность.

В силу замечания 2 чтобы модель $\mathfrak{I}_{T^X}(T^A)$ была согласована с $\mathfrak{I}_{T^A}(T^X)$ нужно в качестве ε -окрестности взять элемент базы топологического пространства T^A.

Определение. ε -окрестностью точки $x \in T^A$ называется любое множество базы T^A, содержащее точку x.

Теорема. Определенные таким образом ε -окрестности удовлетворяют аксиомам Хаусдорфа топологического пространства.

Аксиомы XI), Х2 выполняются по условию определения ε -окрестности. Проверим Х3). Поскольку $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ открыты, то и пересечение их

$$U = \varepsilon_1(x) \cap \varepsilon_2(x) \tag{13}$$

открыто, а значит является объединением множеств базы, в частности, поскольку $U \ni x$, содержит некоторый элемент базы $\varepsilon_3(x)$, содержащий точку x: $U \supset \varepsilon_3(x)$

$$\exists\, \varepsilon_3(x) \mid \quad \varepsilon_3(x) \subset \varepsilon_1(x) \cap \varepsilon_2(x). \tag{14}$$

Следствие. Аксиоматики Александрова и Хаусдорфа топологического пространства эквивалентны.

2) Аксиоматика Рисса топологического пространства T^R

Более естественной и наглядной аксиоматикой топологического пространства по сравнению с аксиоматикой Александрова является аксиоматика Рисса.

Вернемся опять в евклидово пространство (в принципе все рассуждения будут те же и в произвольном метрическом пространстве). В E_n определим расстояние от точки x до подмножества A как точную нижнюю грань расстояний от точки x до точек y множества A

$$\ell(x,A) = \inf \ell(x,y) \quad | \quad y \in A. \tag{15}$$

Поэтому

$$\ell(x,A) = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad O_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset. \tag{16}$$

<u>Определение</u>. Точка x называется близкой к множеству A, если

$$\ell(x,A) = 0 \tag{17}$$

Будем обозначать это так

$$x \,\delta\, A. \tag{18}$$

Оказывается непрерывность отображения пространства E_n на E_n' эквивалентна тому, что при этом отображении сохраняется близость.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы отображение

$$f: E_n \to E_n' \tag{19}$$

было непрерывным в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы при нем сохранялась близость точки x_0 к любому подмножеству $A \subset E_n$

$$\forall A \subset E_n \qquad \ell(x_0,A) = 0 \Longrightarrow \ell(x_0', A') = 0 \tag{20}$$

<u>Необходимость</u>. Возьмем любое

$$\varepsilon > 0 \tag{21}$$

и рассмотрим ε -окрестность точки $x_0' = f(x_0)$

$$O_\varepsilon(x_0'). \tag{22}$$

В силу непрерывности отображения f (19) найдется δ такое, что образ δ -окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0 принадлежит $O_\varepsilon(x_0')$

$$\exists \delta \mid f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(x_0'). \tag{23}$$

Поскольку

$$x_0 \,\delta\, A \qquad (\ell(x_0,A) = 0) \tag{24}$$

то в силу (16) существует точка x множества A

$$x \in A \tag{25}$$

такая, что

$$x \in O_\delta(x_0). \tag{26}$$

Тогда из (25) будет следовать

$$x' \in A' \tag{27}$$

а из (26), (23) -

$$x' \in O_\varepsilon(x_0'), \tag{28}$$

т.е. в силу (16)

$$x_0' \,\delta\, A' \qquad (\ell(x_0', A') = 0) \tag{29}$$

<u>Достаточность</u>. Докажем, что из (20) будет следовать непрерывность отображения по Коши. Для этого нужно доказать, что если нет непрерывности по Коши, то и нет (20), т.е. если

$$\exists \varepsilon \mid \forall \delta \ \exists x \mid \ell(x_0 x) < \delta, \qquad \ell(f(x_0), f(x)) > \varepsilon, \tag{30}$$

то неверно (20), т.е. существует такое множество A, что

$$\ell(x_0 A) = 0 \tag{31}$$

а

$$\ell(f(x_0), A') \neq 0. \tag{32}$$

Возьмем произвольное $\delta_1 > 0$ (33)

в силу (30) $\exists x_1 \mid \ell(x_0 x_1) < \delta_1, \quad \ell(f(x_0), f(x_1)) > \varepsilon,$ (34)

возьмем $\delta_2 = \min\left(\ell(x_0, x_1), \frac{\delta_1}{2}\right),$ (35)

тогда опять в силу (30)

$$\exists x_2 \mid \ell(x_0 x_2) < \delta_2, \quad \ell(f(x_0), f(x_2)) > \varepsilon, \tag{36}$$

и т.д. получим последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots \tag{37}$$

такую, что

$$\ell(x_0, x_k) < \frac{\delta_1}{2^k}, \quad \ell(f(x_0), f(x_k)) > \varepsilon \tag{38}$$

В качестве множества A рассмотрим объединение этих точек

$$A = \bigcup x_1, \ldots, x_k, \ldots \tag{39}$$

В силу (38 $_1$) для него будет

$$\ell(x_0, A) = 0, \quad \ell(x_0', A') > \varepsilon, \tag{40}$$

т.е. близость не сохраняется.

Тем самым можно ввести такое определение непрерывности отображения E_n на E_n' по Риссу.

<u>Определение</u>. Отображение E_n на E_n' называется непрерывным в точке x_0 , если сохраняет близость этой точки к любому подмножеству $A \subset E_n$

$$x_0 \delta A \Longrightarrow x_0' \delta A'. \tag{41}$$

Очевидно, что тогда можно определить непрерывность всего отображения, как непрерывность в каждой точке, а также гомеоморфизм, как взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение.

Это наводит мысль на возможность в качестве неопределяемого понятия для аксиоматики топологии взять близость точки и множества.

Оно будет отношением в ступени

$$M \times \mathcal{P}(M). \tag{42}$$

Каким теоретико-множественным соотношениям оно удовлетворяет?

Легко доказать, что оно удовлетворяет следующим свойствам.

Для точек $a, b, c \in T$ и подмножеств $A, B \subset T$ имеется

P1) $(A \cup B) \not\delta c \iff A \not\delta c,\ B \not\delta c,$ (43)

P2) $\{a\} \not\delta c \iff a \neq b,$ (44)

P3) $c\, \delta \{x \mid x \delta A\} \Rightarrow c \delta A.$ (45)

Эти предложения и взяты в качестве аксиом топологического пространства по Риссу ([17], с.24).

Компонируя теорему с. II и теорему с. 32, получаем, что для того чтобы биекция f: E_n на E_n' сохраняла открытость, необходимо и достаточно, чтобы f^{-1} сохранило близость точки и множества.

Это наводит на мысль об эквивалентности аксиоматик Александрова и Рисса топологического пространства.

Чтобы строго доказать их эквивалентность, нужно, как мы видели ([II], с.26) в каждой из них определить модель другой

$$\mathcal{I}_{T\rho}(T^{\chi}) \qquad \mathcal{I}_{T\chi}(T^{\rho}) \tag{46}$$

и доказать их согласованность

$$\mathcal{I}_{T\rho}(T^{\chi}) \circ \mathcal{I}_{T\chi}(T^{\rho}) = id, \qquad \mathcal{I}_{T\chi}(T^{\rho}) \circ \mathcal{I}_{T\rho}(T^{\chi}) = id \tag{47}$$

В пространстве Рисса T^R множество U называется открытым, если в нем нет ни одной точки близкой к его дополнению

$$T \setminus U \tag{48}$$

В пространстве Александрова точка c называется близкой к множеству A

$$c \delta A, \tag{49}$$

если она является его точкой прикосновения, т.е. (с.I9) любое открытое множество, содержащее c, пересекается с A.

Проверку того, что определенные таким образом отношения образуют модель одной аксиоматики в другой, и их согласованность предоставляем читателю в качестве упражнения.

§ I3. Специальные топологические пространства

Поскольку понятие топологического пространства очень широкое, естественно выбрать среди них некоторые специальные, которые подчиняются дополнительным требованиям.

I) Пространства близости В.А.Ефремовича

Заменяя требование сохранения непрерывности требованием сохранения равномерной непрерывности, получим геометрию близости.

В E_n определим расстояние между двумя подмножествами A и B как точную нижнюю грань расстояний между их точками

$$\rho(A,B) = \inf \rho(x,y) \mid x \in A, y \in B. \tag{I}$$

Два множества A и B называются близкими

$$A \delta B, \tag{2}$$

если расстояние между ними равно нулю

$$\rho(A,B) = 0 \tag{3}$$

В E_n можно доказать, что выполняется теорема, аналогичная теореме с.32, т.е. для того, чтобы отображение

$$f: E_n \longrightarrow E_n' \tag{4}$$

было равномерно непрерывным необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло близость любых двух множеств ([I7], с. 9). (Это верно и в любом метрическом пространстве).

Отображения взаимно однозначные и взаимно равномерно непрерывные называются эквиморфизмами. Значит, ими будут отображения взаимно однозначные и взаимно сохраняющие близость между любыми двумя множествами.

Легко проверяется, что отношение близости множеств удовлетворяет свойствам

$$E0:\quad A \not\delta B \Rightarrow B \not\delta A, \tag{5}$$

$$E1:\quad (A\cup B) \not\delta C \Leftrightarrow A \not\delta C,\ B \not\delta C, \tag{6}$$

$$E2:\quad a, b \mid a \not\delta b \Leftrightarrow a \neq b, \tag{7}$$

$$E3:\quad A \not\delta B \Rightarrow \exists A_1, B_1 \subset T \,|\, T = A_1 \cup B_1,\quad A_1 \not\delta B,\ B_1 \not\delta A. \tag{8}$$

В геометрии близости в качестве неопределяемого отношения принимается близость двух множеств, а в качестве аксиом -предложения (5) - (8).

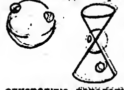
Легко видеть, что если в качестве одного из множеств, например, C взять одну точку c, то будут выполняться аксиомы Рисса (с.33) топологического пространства, т.е. пространство Ефремовича будет специальным случаем топологического пространства (впрочем так же как равномерная непрерывность является частным случаем непрерывности).

2) Однородные топологические пространства

Это пространства, которые одинаково устроены в окрестности каждой своей точки.

Определение. Однородным топологическим пространством называется такое топологическое пространство, что для любых двух его точек и любой пары их окрестностей существуют принадлежащие им гомеоморфные между собой окрестности.

Например, сфера, эллипсоид, параболоид, гиперболоид, плоскость являются однородными топологическими пространствами, если рассматривать на них топологию, индуцированную топологией объемлющего трехмерного евклидова пространства E_3. В противоположность им конус не



будет однородным топологическим пространством, т.к. никакая окрестность его вершины O не гомеоморфна никакой достаточно малой окрестности любой другой его точки.

Также прямая, окружность, эллипс, парабола - однородные топологические пространства, а пара пересекающихся прямых -нет.

Среди однородных топологических пространств выделяются конечномерные.

3) Конечномерные однородные топологические пространства

Введем понятие размерности однородного топологического пространства. Определение. Однородное топологическое пространство T называется не более чем n - мерным

$$\dim T \leq n, \tag{9}$$

если для любого его открытого покрытия A существует открытое покрытие B, вписанное в A (с.28) и такое, что любая точка пространства T принадлежит не более чем $n+1$-ому открытому множеству покрытия B. Однородное топологическое пространство T называется n-мерным, если оно не более чем n-мерное, но не является не более чем $n-1$-мерным

$$dim\,T \leq n, \quad dim\,T \nleq n-1 \Rightarrow dim\,T = n. \tag{10}$$

4) Пространства E

Пространством E назовем топологическое пространство, которое можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств, гомеоморфных евклидовым пространствам E_k (не обязательно одной размерности).

Наиболее важными топологическими пространствами являются топологические многообразия.

ГЛАВА II. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Введение

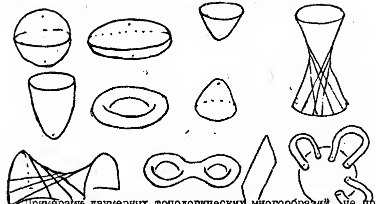
n-мерные топологические многообразия являются непосредственной абстракцией простой поверхности. На I курсе ([8], с.43) мы изучали простые поверхности как такие множества V в евклидовом пространстве E_3, что для любой их точки M существует окрестность, гомеоморфная открытому кругу. Под окрестностью тогда понималась окрестность на V, индуцированная ε-окрестностью $O_\varepsilon(M)$ точки M в E_3, т.е. пересечение $O_\varepsilon(M) \cap V$ (с.18).

Заменяя 2 на n, индуцированную ε-окрестность на окрестность и добавляя к топологическому пространству вспомогательное ([11], с.11) n-мерное евклидово пространство E_n, придем к такому определению n-мерного топологического многообразия.

Определение. n-мерным топологическим многообразием M_n называется хаусдорфово топологическое пространство T, такое, что для каждой его точки $x \in T$ существует ее окрестность $U \ni x$, гомеоморфная внутренности n-мерного шара (без его поверхности) n-мерного евклидова пространства E_n, или, что тоже (для $n=2$ с.6) гомеоморфная самому E_n.

Примерами двумерного топологического многообразия M_2, вложенного в E_3 (с.18) будут: сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоиды, плоскость, тор, крендель. В теории топологических многообразий особенно большое значение имеют так называемые сферы с ручками. Это поверхности, которые получаются из сферы, если в ней проделать четное число круглых отверстий, разбить их на пары и каждую такую пару заклеить

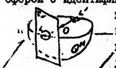
изогнутой трубкой - ручкой, как указано на рисунке



Примерами двумерных топологических многообразий, не принадлежащих трехмерному евклидову пространству E_3, являются бутылка Клейна и проективная плоскость.

Бутылка Клейна - это поверхность, которая получается склеиванием обоих краев трубки, но не снаружи, когда получается тор, а как бы изнутри, когда каждая точка A одного конца идентифицируется не с точкой A' другого конца, лежащей с ней на одной образующей, а например, ей симметричной A'' относительно некоторого диаметра второго конца трубки. В трехмерном пространстве E_3 она реализуется только поверхностью с самопересечением, т.е. бутылка Клейна как топологическое многообразие не вложена в E_3. Однако, она является топологическим многообразием: для любой некраевой точки трубки, из которой получается бутылка, очевидно, что существует окрестность, гомеоморфная открытому кругу, а для вклеенных точек - это очевидно из рисунка.

Проективная плоскость, как видели (с.7) моделируется в E_3 полусферой с идентифицированными диаметрально противоположными точками края.



Для любой некраевой точки M полусферы очевидно, что существует окрестность, гомеоморфная открытому кругу. Рассмотрим точку L на крае полусферы и ей диаметрально противоположную L' и достаточно малые полукруги полусферы с центрами в точках L и L' и их объединение. На касательную плоскость π к полусфере в точке L это объединение спроектируется из центра O во внутренность одного круга, т.е. будет давать окрестность, гомеоморфную открытому кругу.

Примером одномерного топологического многообразия является окружность k в E_3 с топологией, индуцированной топологией E_3. Тогда окрестностью любой ее точки M служит интервал окружности, содержащий эту точку.

Несколько более сложными топологическими пространствами являются топологические многообразия с краем.

Определение. -мерным топологическим многообразие с краем M_n^* называется топологическое пространство T, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо внутренности шара $\mathring{D}_n$, либо полушара $\mathring{D}_n^*$ (часть диаметральной плоскости полушара, внутренняя к соответствующему шару, причисляется к окрестности, а поверхность шара – нет) n-мерного евклидова пространства E_n (или что тоже, имеет окрестность гомеоморфную полупространству E_n^*). Точки, которые обладают окрестностью 2-го типа, называются краевыми, а множество их – краем.

Определение. Двумерное топологическое многообразие и двумерное топологическое многообразие с краем называются соответственно 2-поверхностью и 2-поверхностью с краем.

Для краткости, там, где не опасна двусмысленность, 2-поверхности и 2-поверхности с краем будем называть просто поверхностями.

Определение. Одномерное топологическое многообразие называется линией.

Определение. Множество точек поверхности M_2, на котором топология поверхности M_2 индуцирует одномерное топологическое многообразие называется линией ℓ на поверхности M_2.

Теорема. Край m двумерного топологического многообразия с краем M_2^* есть одномерное топологическое многообразие M_1.

Докажем, что всякая точка M края в топологии, индуцированной на край, имеет окрестность $o(M)$ гомеоморфную интервалу (отрезку без концов). В силу определения краевой точки точка M будет иметь окрестность $O(M)$ в M_2^* гомеоморфную полукругу с центром в точке M, к которому причисляется гомеоморфный образ диаметра $]AB[$ полукруга без концов.

Любая точка N интервала $]AB[$ краевая, т.к. для нее не существует круга с центром в точке N, принадлежащего M_2^*. Любая точка L окрестности $O(M)$, не принадлежащая интервалу $]AB[$ – не краевая, т.к. для нее существует круг с центром в точке L и целиком принадлежащий $O(M)$ и значит M_2^*. Поэтому в индуцированной топологии на край m, в которой окрестностью $o(M$ точки M будет пересечение окрестности $O(M)$ с m (с.18)

$$o(M) = O(M) \cap m, \qquad (1)$$

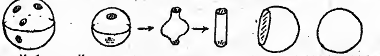
.этой окрестностью будет интервал $]AB[$.

Определение. Компонента края поверхности называется ее контуром.

Рассмотрим примеры поверхностей с краем.

I) Полуплоскость π_1, к которой причислена прямая ℓ, относительно которой взята эта полуплоскость; 2) Полусфера с краем; 3) по-

лугиперболоид с краем; 4) Сфера с r отверстиями (дырами). При $r=2$ она гомеоморфна цилиндру, а при $r=1$ гомеоморфна диску (кругу с краем)



5) Лист Мебиуса. Им называется поверхность, которая получается из узкого прямоугольника, если один конец прямоугольника повернуть на $180°$ и склеить с противоположной стороной. Он имеет один контур.

Определение. 2-клеткой называется диск (топологическое многообразие с одним контуром, гомеоморфное замкнутому кругу) с несколькими ℓ ($\ell \geqslant 2$) фиксированными точками на краю. Эти точки называются вершинами клетки, а дуги края между соседними вершинами - сторонами или ребрами клетки. Такая клетка называется ℓ-угольной.

Определение. Клеточным разложением K поверхности называется ее представление в виде объединения клеток такого, что пересечение двух клеток может состоять лишь из общих ребер и общих вершин. Совокупность ребер и вершин клеток данного клеточного разложения K поверхности M_2 называется его остовом.

Клеточное разложение поверхности из треугольных клеток называется триангуляцией поверхности.

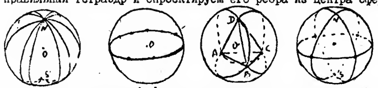
Всякое клеточное разложение всегда можно превратить в триангуляцию, разлагая, если нужно, любую клетку на треугольные.

Для 2-поверхности (2-поверхности с краем) имеется следующая важная и очень трудная теорема о ее клеточном разложении.

Теорема. (без доказательства). Всякая 2-поверхность допускает клеточное разложение.

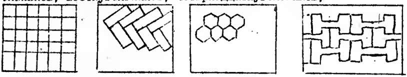
Одна и та же поверхность может допускать различные клеточные разложения. Например, сфера допускает разложение на S двуугольных клеток ([I2], с.43), на две n-угольные клетки. Также она допускает разложение на четыре треугольные клетки, а именно такое: впишем

в нее правильный тетраэдр и спроектируем его ребра из центра сферы



на нее. С другой стороны ([I2], с.36) сфера допускает триангуляцию из восьми треугольных клеток при помощи трех больших окружностей, не имеющих общих точек.

Плоскость можно замостить паркетом из прямоугольников, пятиугольников, шестиугольников, четырнадцатиугольников,



Более того, клеточное разложение поверхности может быть сколь угодно мелким, т.е. для любого открытого покрытия A поверхности существует клеточное разложение ее, вписанное (с.28) в это покрытие (любая клетка принадлежит некоторому открытому множеству этого покрытия). Вводя соответствующие понятия, можно доказать аналогичную теорему для n-мерного топологического многообразия M_n.

Следствие. Одномерное топологическое многообразие допускает клеточное разложение, вписанное в любое его открытое покрытие.

Очевидно, что всякое топологическое многообразие является однородным топологическим пространством. Однако, при помощи только что сформулированной теоремы можно доказать, что это топологическое пространство n-мерное. Докажем это для n равного 2.

Теорема. Всякая 2-поверхность является двумерным топологическим пространством.

Действительно, рассмотрим клеточное разложение поверхности, превратим его в триангуляцию Δ и определим открытое покрытие таким

образом: в качестве открытых множеств возьмем "звезды" вершин M этой триангуляции, т.е. объединение треугольных клеток триангуляции Δ, имеющих M вершиной и без противоположных сторон точке M. Тогда, если точка N является точкой треугольной клетки a, то она принадлежит трем нашим открытым множествам: звездам с центрами в вершинах этой клетки a, если является точкой ребра, то принадлежит двум открытым множествам: звездам с центрами в концах этого ребра, если сама является вершиной, то принадлежит одному открытому множеству - звезде с центром в этой

точке. Тем самым будет выполняться второе условие двумерного топологического пространства (с.35). Беря достаточно мелкое исходное клеточное разложение, получим покрытие B вписанное в любое заранее данное покрытие A , т.е. будет удовлетворяться и первое требование.

Заметим, что в случае сферы и плоскости имеется разница: сферу можно разложить на конечное число клеток, а плоскость – нет. С другой стороны, сфера по лемме Бореля-Лебега (с.29) в силу ограниченности и замкнутости компактна, а плоскость в силу неограниченности нет. Оказывается в этом имеется закономерность.

Теорема.(без доказательства) Всякая компактная поверхность (возможно с краем) допускает конечное клеточное разложение (вписанное в произвольное открытое покрытие).

И обратно, если поверхность допускает конечное клеточное разложение, то она компактна.

Тогда очевидно, что компактная поверхность является пространством E (с. 36), т.к. если ее конечное клеточное разложение имеет α_2 клеток и остов его состоит из α_1 ребер и α_0 вершин, то ее можно разбить на непересекающиеся множества гомеоморфные E_k , а именно на α_2 открытых клеток, гомеоморфных E_2 , α_1 открытых ребер гомеоморфных E_1 и α_0 вершин гомеоморфных E_0 .

Определение. Компактная поверхность называется замкнутой поверхностью. Из примеров 2-поверхностей на с.37 компактными в силу своей ограниченности по лемме Бореля-Лебега будут в E_3 сфера, эллипсоид, тор, крендель, сфера с p ручками, а из 2-поверхностей с краем – лист Мебиуса. Остальные 2-поверхности с.37 не компактны. Поэтому первые допускают клеточное разложение из конечного числа клеток, например, сфера на с. 40, а вторые – лишь бесконечное клеточное разложение, например, плоскость на с.40.

Проективная плоскость допускает клеточное разложение (С.16) из четырех треугольных клеток, поэтому является компактным топологическим многообразием.

Бутылка Клейна также компактна, т.к. допускает конечное клеточное разложение. А именно, рассмотрим клеточное разложение трубки в боковой поверхности параллелепипеда, каждая грань которого разделена на две. Склеивая одинаково обозначенные ребра ее контуров, получим бутылку Клейна и ее клеточное разложение из восьми клеток, восьми вершин и шестнадцати ребер

$$\alpha_2 = 8,\ \alpha_0 = 8,\ \alpha_1 = 16 \qquad (2)$$

Теорема с.41 переносится на любое n.

Теорема 1. Всякое компактное n-мерное топологическое многообразие допускает конечное клеточное разложение.

Поскольку клетка связна, а каждое связное подмножество принадлежит одной компоненте (с.26), то отсюда легко следует такое утверждение.

Следствие. Всякое компактное n-мерное многообразие имеет конечное число компонент.

Рассмотрим окружность. Мы уже видели (с.38), что она является топологическим многообразием. По лемме Бореля-Лебега в силу ограниченности и замкнутости ее в E_2 она компактна и, значит, допускает конечное клеточное разложение в виде простой замкнутой ломаной. Верно и обратное.

Теорема 2 Всякое связное компактное одномерное топологическое многообразие гомеоморфно окружности.

Это прямо следует из теоремы 1 для $n=1$ в силу которой оно гомеоморфно простой замкнутой ломаной из конечного числа звеньев.

Эти теоремы позволяют дать такое топологическое определение окружности.

Определение. Простым циклом (или окружностью) называется компактное связное одномерное топологическое многообразие.

Тогда всякая прямая на проективной плоскости является простым циклом, поскольку она гомеоморфна окружности (с.6).

Из следствия для $n=1$ и теоремы 2 получаем такое утверждение

Следствие. Всякое компактное одномерное топологическое многообразие является объединением конечного числа простых циклов.

В дальнейшем будем рассматривать только компактные поверхности.

§ 2. Связность топологического многообразия

Теорема. Для того, чтобы компактное топологическое многообразие V было связно, необходимо и достаточно, чтобы любые две ее клетки π_1, π_n любого ее клеточного разложения можно было связать цепочкой клеток

$$\pi_1, \dots, \pi_n \tag{1}$$

любые две соседние из которых имеют общее ребро.

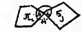
Достаточность. Рассмотрим произвольные две точки $x_1, x_n \in V$ и клетки их содержащие

$$\pi_1 \ni x_1, \quad \pi_n \ni x_n \tag{2}$$

и цепочку клеток (1) их соединяющую. Поскольку клетки связные множества, то в силу теоремы с.23 вся цепочка будет связным множеством $C(x_1, x_n)$ содержащим точки x_1, x_n, а потому в силу теоремы 1 с. 23 V — связно.

Необходимость. Пусть V — связно и клетки π_1 и σ_1 нельзя соединить цепочкой (1). Рассмотрим все клетки π_i, которые можно соединить с клеткой π_1 цепочками вида (1). Совокупность их образует клеточное разложение, т.е. топологическое многообразие V_1. Дополне-

ние его до V очевидно также образует топологическое многообразие V_2. Ни одна клетка из V_1 ни с одной клеткой из V_2 не имеет общего ребра a, ибо в противном случае клетку σ_j можно было бы через a π_i соединить цепочкой с π_1, что противоречит разбиению. Также ни одна клетка π_i ни с одной клеткой $\sigma_j \subset V_2$ не может иметь лишь одну общую вершину A, ибо в противном случае окрестность этой точки A не



была бы гомеоморфна E_2 (или E_2^+) что противоречит определению топологического многообразия.

Тем самым многообразия V_1 и V_2 не пересекаются. Поскольку они оба замкнуты как объединения клеток – замкнутых множеств., то получаем, что множество V несвязно.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы компактная поверхность W была связна, необходимо и достаточно, чтобы она была линейно связна.

Достаточность следует из теоремы с.23. Докажем достаточность.

Пусть точки x_1 и x_n принадлежат клеткам π_1 и π_n и (I) – цепочка клеток, их соединяющая. Выберем на общих ребрах соседних клеток по точке

$$y_i \in a_i \qquad (3)$$

и рассмотрим дуги $x_1 y_1, y_1 y_2, \ldots y_{n-1} x_n$ принадлежащие клеткам π_i

$$x_1 y_1 \subset \pi_1, \; y_1 y_2 \subset \pi_2, \ldots \qquad (4)$$

Они образуют линию

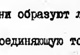
$$x_1 y_1 \ldots x_n, \qquad (5)$$

соединяющую точку x_1 с точкой x_n и принадлежащую многообразию W

§ 3. <u>Порядок связности поверхности</u>.

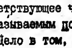
Как мы видели (с. 27) связность поверхности является топологическим инвариантом. Более того, связность поверхности можно <u>измерить</u>. Соответствующее число также будет важным топологическим инвариантом – так называемым <u>порядком связности</u> поверхности.

Дело в том, что некоторые связные поверхности от <u>разреза</u> по замкнутой простой линии (простому циклу) раскалываются на две части, а некоторые–нет. Например, сфера – связная поверхность, но если на



сфере провести любой простой цикл (с.42 – линию гомеоморфную окружности) и сделать по нему разрез, то она распадается на две поверхности, каждая из которых гомеоморфна диску, т.е. перестает быть связной.

Если же на торе провести простой цикл – меридиан или простой цикл – параллель, или и то и другое вместе и по ним сделать разрезы, то



связность не нарушится – значит она более крепкая, чем у сферы.

<u>Определение</u>. Простой цикл связной поверхности, разрез по которому не нарушает связности, называется <u>существенным</u>, а альтернативный –

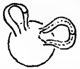
— несущественным.

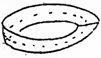
Примеры. 1. На сфере любой простой цикл – несущественен.

2. На торе любая параллель – существенный цикл, любой меридиан – существенный цикл.

3. Сфера с p ручками (с.36) имеет одновременно $2p$ существенных циклов, соответствующих их меридианам и параллелям каждой ручки.

4. На листе Мебиуса (с.39) экватор (поясок) является существенным циклом.





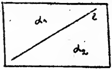
Чем больше существует существенных циклов независимых между собой на связной поверхности, тем сильнее ее связность – больше порядок связности.

Тем самым мы приходим к определению порядка связности поверхности как числа независимых существенных циклов на ней.

Однако, здесь нужно дать математическое определение входящим терминам: простых циклов, разрезов по ним и независимости между ними.

В дальнейшем под линией на поверхности будем понимать линию, состоящую из ребер некоторого клеточного разложения поверхности, и соответственно, простым циклом – линию гомеоморфную окружности, элементарным простым циклом клеточного разложения назовем край любой одной его клетки.

Перейдем к определению разреза. Он, очевидно, должен быть математическим обобщением известной операции с ножницами. Но если рассмотреть, например, лист бумаги и прямую линию на нем, то разрез ножницами разделит все точки листа на две части. А при математическом делении прямая ℓ по аксиоме ([II], с. 57) плоскость делит на две части – открытые полуплоскости α_1 и α_2 – лишь точки плоскости, не принадлежащие этой прямой. А как же быть с точками самой прямой ℓ ? Причислить их только к одной полуплоскости, будет несправедливо по отношению к другой. Тут есть два выхода: либо никому, либо обеим, т.е. либо разрезом назвать удаление линии ℓ, либо линию ℓ удвоить (рассмотреть два ее экземпляра)



$$\ell \to \ell_1 = \ell_2 \qquad (1)$$

и каждый экземпляр присоединить к одной полуплоскости

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cup \ell_1, \qquad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \cup \ell_2, \qquad (2)$$

получим две замкнутые полуплоскости.

Остановимся на втором определении, т.к. тогда I) соответствующий разрез не будет нарушать компактность и 2) при нем легче определить обратную операцию – склеивание контуров (или одного контура с самим собою) как отождествление их точек.

Определение. Разрезом поверхности V по внутренней ее линии ℓ называется операция, при которой рассматриваются два экземпляра линии ℓ:

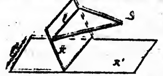
$$\ell_1 = \ell_2 \qquad (3)$$

и переходят к поверхности V^+, для которой ℓ_1 и ℓ_2 являются новыми краями (новым краем). Разрез по краю – тождество.

Операция обратная разрезу называется склеиванием. Ее мы имели, когда определяли сферу с ручками (с.36), бутылку Клейна (с.37), когда доказывали (с.7), что склеивая диаметрально противоположные точки края полусферы, получаем модель проективной плоскости. Значит, разрезая проективную плоскость по произвольной прямой ℓ (т.к. проективная плоскость с произвольной прямой является моделью расширенной плоскости с несобственной прямой ([9], с. IO3)), получим поверхность, гомеоморфную полусфере с одним краем $\ell_1 \cup \ell_2$ или проектируя ее на

плоскость π – диск с краем, или сферу с одной дырой, или (с.6) сферу без одной точки. Поскольку полученная поверхность связна, значит, любая прямая на проективной плоскости – существенный цикл.

Замечание. Однако, очень важно заметить, что разрез по линии ℓ поверхности V и удаление линии ℓ дают один и тот же эффект для связности полученных поверхностей V^+ и V^-, ибо V^- получается из V^+ удалением края $\ell_1 \cup \ell_2$, которое на связность поверхности не влияет. Поэтому для определения существенности цикла иногда будет удобнее рассматривать его удаление. Например, рассмотрим модель проективной плоскости – расширенную плоскость $\pi^* \subset E_3$, и на ней произвольную прямую ℓ. Ее всегда можно спроектировать



из произвольной точки S, ей не принадлежащей, на другую плоскость π' так, чтобы эта прямая ℓ перешла в несобственную прямую ℓ'^* плоскости π' ([9], с.IO3). Удаление ее несобственной прямой из расширенной плоскости превращает ее в обычную евклидову плоскость, которая связна. Поскольку проектирование – гомеоморфизм, то и $\pi \setminus \ell$ – связно.

Теперь можно сформулировать критерий существенности цикла.

Теорема. Для того, чтобы замкнутая линия ℓ поверхности V была

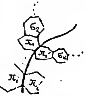
существенным циклом, необходимо и достаточно, чтобы любые две клетки ее клеточного разложения можно было бы соединить цепочкой клеток, никакие две соседние из которых не имеют общее ребро принадлежащим линии ℓ. Действительно, тогда эта цепочка будет цепочкой и для любых двух клеток поверхности V^*, котрая получается из V разрезом по ℓ, а потому в силу теоремы с.42 поверхность V^* будет связна, и, значит, линия ℓ -существенный цикл.

Теорема. Для того, чтобы замкнутый простой разрез ℓ был существенным, необходимо и достаточно, чтобы какие-нибудь две клетки π_1 и π_1',

примыкающие друг к другу по ребру, принадлежащему разрезу, можно было соединить цепочкой клеток, никакие две соседние из которых не имеют общее ребро, принадлежащим разрезу, т.е. минуещей разрез.

Необходимость очевидна из предыдущей теоремы.

Достаточность. I. Если прибрежную клетку π_1 с ей противоположной через ℓ клеткой π_1' можно соединить цепочкой



$$\pi_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k, \pi_1' \qquad (4)$$

не переходящей разрез, то любую прибрежную клетку π_i можно будет соединить такой же цепочкой с ей противоположной через разрез ℓ клеткой π_i'. Действительно, двигаясь вдоль разреза, мы соединим цепочкой клетку π_1 по крайней мере с одной из π_i или π_i', пусть с π_i, т.е. цепочкой

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i \qquad (5)$$

тогда противоположную клетку π_1' с другой стороны разреза ℓ можно будет соединить цепочкой с π_i'

$$\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_i' \qquad (6)$$

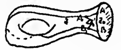
с π_i', также не переходящей разрез. Тогда цепочек (5),(4) и (6)

$$\pi_i, \ldots, \pi_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k \pi_1', \ldots \pi_i' \qquad (7)$$

будет искомой цепочкой.

2. Любые две клетки π и σ можно соединить цепочкой, не переходящей через разрез, т.к. в силу связности V их можно соединить цепочкой клеток на V (с. 42), а если эта цепочка переходит разрез, т.е. в ней присутствует в качестве соседних две прибрежные клетки π_i и π_i', то переход от π_i к π_i' по ребру разреза можно заменить окольным путем, минуя разрез в силу доказанного в части I. Тогда в силу предыдущей теоремы разрез по этой линии ℓ существенный.

Теорема. Если на поверхности с краем имеется существенный цикл z в который входит часть $[AB]$ края, то существует существенный разрез z', все точки которого - внутренние.



Пусть внутренними вершинами разреза z соседними соответственно с вершинами A и B будут точки A_1 и B_1. Линию A_1ABB_1 обозначим через z_0

$$A_1ABB_1 = z_0 \qquad (8)$$

Рассмотрим цепочку Δ_0 клеток, примыкающих к z_0 ребрами или вершинами и для которой любые две соседние имеют общее ребро. Пусть ломаная $z_0' A_1 \dots B_1$ дополняет ломаную z_0 до края этой цепочки Δ_0. Заменим в разрезе z ломаную z_0 ломаной z_0', получим разрез z' и докажем, что он искомый. Возьмем две соседние через исходный разрез z клетки π_1 и π_1', не входящие в прикраевую цепочку Δ_0. Если брать на V достаточно мелкое клеточное разложение, что возможно в силу теоремы с.41, то такие всегда найдутся. Из существенности разреза z их можно соединить цепочкой Δ клеток

$$\pi_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \pi_1' \qquad (9)$$

не переходящей через разрез z. Если в эту цепочку (9) войдет полностью или частично цепочка Δ_0

$$\bar{\Delta}_0 \subset \Delta_0, \ \bar{\Delta}_0 \subset \Delta \qquad (10)$$

то заменяя ее цепочкой $\bar{\Delta}_0'$, примыкающей к ломаной z_0' с другой стороны, получим цепочку от π_1 до π_1', не пересекающую замкнутый разрез z'. В силу теоремы с. 46 z' – существенный разрез.

Следствие. Теорема верна, когда кусок «AB» состоит из одной точки.

Чтобы измерить степень связности поверхности, введем понятие порядка связности клеточного разложения K поверхности V.

Определение. Простые циклы z_j клеточного разложения K поверхности V называются сильно независимыми, если в каждом из них имеется хотя бы одно ребро

$$a_j \in z_j \qquad (11)$$

не принадлежащее другим

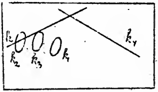
$$a_j \notin z_k \quad k \neq j \qquad (12)$$

Определение. Порядком связности q клеточного разложения K поверхности V называется максимальное число сильно независимых простых циклов z_j его, одновременный разрез по которым не нарушает связности поверхности V (одновременно существенных).

Очевидно, он является топологическим инвариантом разложения K.

В будущем (с. 54) мы докажем, что порядки связности различных клеточных разложений K_i поверхности V равны между собой и тем самым мы получим топологический инвариант самой поверхности V – порядок ее связности. В силу замечания с. 45 порядок связности поверхности V будет равняться числу сильно независимых циклов, которые можно удалить из поверхности без нарушения ее связности.

Например, рассмотрим проективную плоскость. Единственный простой цикл на ней заведомо существует, ибо им является любая прямая (с. 45). Если из двух простых циклов k, k_i на ней один, пусть



k -прямая, то удаление прямой k превращает проективную плоскость в аффинную ([9], с. 103), а простой цикл k_i на ней будет гомеоморфен эллипсу, гиперболе, параболе ([9], с. 106) или другой прямой, а они, как известно, разбивают аффинную плоскость на два несвязных между собой куска. Тем самым разрез по двум простым циклам, один из которых - прямая всегда нарушает связность проективной плоскости. Это наводит на мысль о том, что порядок связности q проективной плоскости равен I, однако не доказывает это предположение: может быть существуют какие-нибудь другие два существенных цикла, разрез по которым не нарушает ее связность.

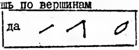
Мы видим, что даже для такой сравнительно простой поверхности, как проективная плоскость, определение порядка связности достаточно трудно. Однако, существует регулярный, эффективный и простой способ его нахождения для любой поверхности. Его дает теорема Эйлера для поверхности (с. 52). Доказательству теоремы Эйлера способствует изучение линейного комплекса (графа).

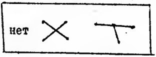
§ 4. Линейный комплекс (граф).

Рассмотрим совокупность ребер и вершин (остов) клеточного разложения поверхности V (поверхности с краем) (не обязательно связной). Этот остов является частным случаем линейного комплекса.

Определение. Линейным комплексом K_1 называется конечное множество множеств, гомеоморфных отрезкам (с концами) и точек, называемых соответственно ребрами и вершинами, таких, что

I) концы каждого ребра - вершины, 2) каждая вершина - либо конец ребра, либо изолированная точка, 3) любые два ребра могут пересекаться лишь по вершинам





Линейный комплекс будет топологическим пространством, если, например, в нем объявить такую топологию: открытым множеством называется всякое ребро без концов и звезда любой его вершины, т.е. совокупность любой вершины и ребер, имеющих эту вершину концом, но без вторых концов этих ребер, а также открытым множеством считаем любое объединение предыдущих. Можно на нем рассматривать и другую топологию, например, гомеоморфную топологии, индуцируемой на линейном комплексе

трехмерного евклидова пространства топологией этого пространства.

Определение. Цепочкой ребер линейного комплекса называется упорядоченная последовательность некоторых его ребер такая, что два соседних имеют общую вершину, т.е. ломаная из ребер.

Теорема. Для того, чтобы линейный комплекс был связным, необходимо и достаточно, чтобы любые две его вершины можно было соединить цепочкой из его ребер (т.е. чтобы он был линейно связан).

Необходимость. Рассмотрим все вершины, которые можно соединить с одной вершиной A цепочками таких ребер. Они вместе с этими ребрами образуют линейный комплекс K_1^*, любые две точки M и N которого можно соединить ломаной из ребер комплекса K_1^*, взяв, например, объединение ломаных, соединяющих M с A и A с N. Если вершина B не принадлежала бы комплексу K_1^*, то:I) комплекс

$$K_1^{**} = K_1 \setminus K_1^* \qquad (I)$$

- непустой, ибо содержит точку B, 2) комплексы K_1^* и K_1^{**} не пересекаются, 3) как всякие комплексы они открыты, тем самым K_1^* и K_1^{**} являются компонентами K_1, что противоречит его связности.

Достаточность. Если бы существовало бы хотя бы две компоненты у комплекса K_1, то любую точку одной компоненты нельзя было бы соединить с любой точкой второй компоненты, ибо в противном случае эти компоненты совпадали бы.

Связность линейного комплекса можно измерить. По аналогии с порядком связности клеточного разложения поверхности (с.47) дадим такое определение.

Определение. Порядком связности $p_1(K_1)$ линейного комплекса K_1 называется максимальное число его ребер без вершин (открытых ребер), которые можно удалить из него без увеличения числа его компонент.

Замечание. В частности, если исходный линейный комплекс связный, то порядок связности $p_1(K_1)$ - это число открытых ребер, которые можно вынуть из K_1 без нарушения связности.

Определение. Простые циклы

$$z_1, \dots, z_k \qquad (2)$$

линейного комплекса K_1 называются сильно независимыми, если в каждом z_j из них имеется хотя бы одно ребро

$$a_j \subset z_j \qquad (3)$$

не принадлежащее другим из них

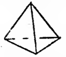
$$a_j \not\subset z_k \quad k \neq j \qquad (4)$$

Зафиксируем по одному такому ребру из них

$$a_1, \dots, a_p. \qquad (5)$$

Эти ребра a_j для сильно независимых циклов z_j будем называть различающими их.

Например, в линейном комплексе остова поверхности тетраэдра



имеется три сильно независимых цикла.

Теорема. Порядок связности $p_1(K_1)$ линейного комплекса K_1 равняется максимальному числу $\bar{q}$ сильно независимых его циклов

$$p_1 = \bar{q} \tag{6}$$

Доказательство разобьем на две части:

$$\text{I)}\quad p_1 \leq q \qquad\qquad 2)\quad \bar{q} \leq p_1 \tag{7}$$

I) Вынем из комплекса все p_1 открытых ребер

$$a_j = \langle A_j B_j \rangle, \qquad j = 1, \dots, p_1 \tag{8}$$

которые можно вынуть без увеличения числа компонент. Получим комплекс K_1^*. Поскольку вершины A_j и B_j можно было соединить ребром a_j они принадлежат одной компоненте, а число компонент не увеличилось, поэтому и после разрушения моста a_j из A_j в B_j можно будет добраться окольным путем, состоящим из ребер комплекса K_1^*. Возвращая к этой ломаной, соединяющей A_j с B_j ребро a_j, получим цикл z_j. Эти циклы z_j сильно независимы, так как ребро $a_j = \langle A_j B_j \rangle$ по

построению принадлежит лишь одному из этих циклов z_j, т.е.

$$p_1 \leq \bar{q} \tag{9}$$

2) Обратно, если в K_1 имеется самое большое $\bar{q}$ сильно независимых циклов z_j, то в силу (3) с. 49 для любого из них имеется по крайней мере одно ребро

$$a_j = \langle A_j B_j \rangle, \qquad a_j \subset z_j, \tag{10}$$

не входящее в другие циклы

$$a_j \bar{\subset} z_k, \qquad k \neq j \tag{11}$$

поэтому после удаления всех этих ребер a_j все остальные ребра каждого цикла z_j сохранятся и мы сможем от точки A_j до точки B_j перейти по ломаной из оставшихся ребер цикла z_j. Тогда линейный комплекс

$$K_1^* = K_1 \setminus \{a_j\} \tag{12}$$

будет иметь столько же компонент p_0^*, что и p_0 у K_1

$$p_0^* = p_0 \tag{13}$$

Действительно, т.к. любые две точки M и N одной компоненты комплекса K_1 можно соединить ломаной из ребер K_1, то их можно соединить ломаной из ребер K_1^*, заменив в пути, если нужно, обрушенный мост a_j окольным путем по соответствующему циклу z_j.

Значит, по крайней мере $\bar{q}$ ребер можно вынуть из K_1 без увеличения числа компонент, т.е.

$$\bar{q} \leq p_1. \tag{14}$$

Из (9) и (14) следует (8).

Следствие. Если порядок связности линейного комплекса равен 0

$$p_1(K_1) = 0 \tag{I5}$$

то комплекс не содержит ни одного цикла. (Такой комплекс называется деревом).

Порядок связности линейного комплекса можно подсчитать, зная число ребер и вершин его по теореме Эйлера для линейного комплекса.

Теорема Эйлера для линейного комплекса

$$\alpha_0 - \alpha_1 = p_0 - p_1 \tag{I6}$$

где α_0, α_1 – числа вершин и ребер, p_0 – число компонент комплекса K_1, p_1 – порядок его связности.

Число

$$\alpha_0 - \alpha_1 \tag{I7}$$

называется характеристикой Эйлера линейного комплекса K_1.

Доказательство. Вынем из K_1 те p_1 открытых ребер, которые можно вынуть из него без увеличения его компонент. Для полученного комплекса K_1^* тогда будет

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - p_1, \quad \alpha_0^* = \alpha_0, \quad p_0^* = p_0. \tag{I8}$$

Поскольку больше из K_1^* нельзя вынуть ребро без того, чтобы не увеличилось число компонент, порядок связности комплекса K_1^* равен нулю

$$p_1(K_1^*) = 0 \tag{I9}$$

(он является деревом). Докажем тогда, что в каждой из p_0 его компонент K_1^i число вершин на единицу больше числа ребер

$$\alpha_0^i - \alpha_1^i = 1 \qquad i = 1, \dots, p_0 \tag{20}$$

Для этого сначала докажем, что в каждой компоненте имеется концевая точка, т.е. точка, которая либо изолированная, тогда $\alpha_1^i = 0$ и верно (20), либо является концом лишь одного ребра. Действительно, если компонента не состоит из одной изолированной точки, то у нее есть ребра; рассмотрим одно ребро этой компоненты и его концы – вершины A, B. Если ни одна из них не является концевой точкой; то рассмотрим какие-нибудь другие ребра, имеющие их своими концами, например $[A_1A]$ и $[BB_1]$ и т.д. Ломаная $A_k \dots AB \dots B_k$ не может замкнуться, т.к. в силу (I9) и следствия (I5) компонента K_1^i не имеет простого цикла, и не может удлиняться бесконечно в силу конечности числа ребер. Значит, в конце концов придем к концевой точке; пусть A_k. Вынем из компоненты K_1^i концевую точку A_k и соответствующее ребро $[A_kA_{k-1}]$, для полученного комплекса $K_1^i \setminus [A_kA_{k-1}]$ очевидно будет также

$$p_1 = 0, \tag{21}$$

а разность $\alpha_0^{i*} - \alpha_1^{i*}$ в каждой компоненте сохранится

$$\alpha_0^{i*} - \alpha_1^{i*} = \alpha_0 - \alpha_1 \tag{22}$$

так как

$$\alpha_0^{i*} = \alpha_0 - 1, \quad \alpha_1^{i*} = \alpha_1 - 1 \tag{23}$$

Рассуждая про комплекс K_1^{i*} как про K_1^i, получим комплекс K_1^{i**}

у которого разность $\alpha_0^{*''}-\alpha_1^{*''}$ будет та же, что и у K_1^* , а число ребер и вершин уменьшится еще на единицу. В конце концов, в каждой компоненте дойдем до точки в буквальном смысле, т.е. откинем все ребра и все вершины, кроме одной последней, а это и доказывает (20).

Складывая равенства (20) для всех p_o компонент, получим

$$\alpha_o^* - \alpha_1^* = p_o, \tag{24}$$

откуда в силу (18) будем иметь искомую теорему (16).

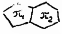
§ 5. Теорема Эйлера для поверхности

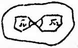
Теорема. Для любого клеточного разложения связной поверхности V имеется

$$\alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 = 2 - q, \tag{1}$$

где q - максимальное число сильно независимых его циклов, которые можно одновременно удалить без нарушения связности поверхности V, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ - соответственно числа вершин, ребер и клеток разложения.

Поскольку клеточное разложение конечно, клетки π_κ $(\kappa = 1, \ldots, \alpha_2)$ можно занумеровать. Занумеруем их так, чтобы каждая последующая примыкала к одной из предыдущих по общему ребру. Это можно сделать так. В качестве π_1 возьмем любую клетку. Она не может быть изолированной, т.к. поверхность связна





$$p_0 = 1, \tag{2}$$

и не может примыкать ко всякой другой клетке самое большее по вершине, ибо тогда для общей их вершины окрестность будет противоречить определению топологического многообразия. Значит, найдется клетка π_2 , которая примыкает к π_1 по ребру a_1 . Рассмотрим вместо π_1 большую клетку, являющуюся объединением π_1 и π_2 и т.д. пока не исчерпаем все α_2 клетки

$$\pi_1, \ldots, \pi_{\alpha_2}. \tag{3}$$

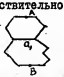
Ребро, по которому каждая последующая клетка π_κ примыкает к одной из предыдущих, обозначим

$$a_{\kappa-1}. \tag{4}$$

Вынем последовательно все клетки π_κ (без границ) и ребра между ними (т.е. связное топологическое многообразие V^*). Останется линейный комплекс K_1^* . Он будет связным

$$p_0^* = 1. \tag{5}$$

Действительно, в силу связности поверхности V связен линейный комплекс K_1 ее клеточного разложения. Если две точки A и B комплекса K_1^* будучи точками связного комплекса K_1 связаны ломаной из ребер K_1, содержащей выкидываемое ребро a_1 , то его можно



заменить краем (границей) клетки π_1 или π_2 примыкающих к a_1 и т.д. получим, что точки A и B можно соединить ломаной из ребер K_1^*.

Тогда для комплекса K_1^* будет

$$\rho_0^*=1, \quad \alpha_0^*=\alpha_0, \quad \alpha_1^*=\alpha_1-(\alpha_2-1), \quad \rho_1^* \qquad (6)$$

и из (I6) с.5I для K_1^*: $\alpha_0^*-\alpha_1^*=\rho_0^*-\rho_1^*$ получим

$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2-\rho_1^*. \qquad (7)$$

Удаленные клетки и ребра связаны между собой, поэтому если удалить из V комплеко K_1^*, получим связное топологическое многообразие V^*. Но ρ_1^* равно максимальному числу сильно независимых циклов комплекса K_1^* (6)с.50)

$$\rho_1^*=q. \qquad (8)$$

Тем самым $\rho_1^*=q$ есть максимальное число сильно независимых циклов и комплекса K_1, которые можно удалить из V без нарушения ее связности.

<u>Следствие</u>. Повторяя доказательство теоремы для <u>связной</u> поверхности с краем, получим для нее формулу (I), где

$$q=r+k, \qquad (9)$$

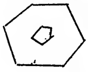
где r –число компонент края, а k – число сильно независимых внутренних замкнутых разрезов, которые можно сделать без нарушения связности поверхности.

<u>Определение</u>. Альтернированная сумма, стоящая в левой части (I)

$$\chi(K)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2 \qquad (I0)$$

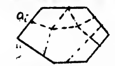
клеточного разложения K поверхности V (возможно с краем) называется <u>его эйлеровой характеристикой</u>.

<u>Следствие</u>.Для любого клеточного разложения одной клетки характеристика Эйлера равна I. Действительно, поскольку в силу теоремы Жордана любая замкнутая линия внутри клетки разбивает ее, то $k=0$, кроме того, клетка имеет один контур $r=1$, тогда по теореме (I) в силу (9)



$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=1. \qquad (II)$$

<u>Теорема</u>.Характеристики Эйлера различных клеточных разложений одной компактной поверхности V равны между собой.



Пусть имеем два клеточных разложения A и B поверхности V на клетки

$$a^i \qquad (I2)$$

и

$$b^j \qquad (I3)$$

соответственно с числами граней, вершин и ребер

$$\alpha_2, \ \alpha_0, \ \alpha_1 \qquad (I4)$$

и

$$\beta_2, \ \beta_0, \ \beta_1, \qquad (I5)$$

и,следовательно, характеристиками Эйлера

$$\chi(A)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2, \qquad \chi(B)=\beta_0-\beta_1+\beta_2. \qquad (I6)$$

Рассмотрим пересечение клеток (I2) и (I3)

$$a^i \cap b^j = c^{ij} \qquad (I7)$$

Клетки c^{ij} очевидно также заполняют поверхность V - образуют ее клеточное разложение C, пусть число граней, вершин и сторон его соответственно равняется

$$\gamma_2, \gamma_0, \gamma_1 \qquad (I8)$$

Чтобы доказать равенство характеристик Эйлера для разложений (I2) и (I3)

$$\chi(A) = \chi(B), \qquad (I9)$$

докажем, что каждая из них равняется характеристике Эйлера $\chi(C)$ этого клеточного разложения C

$$\chi(A) = \chi(C), \qquad \chi(B) = \chi(C). \qquad (20)$$

Докажем первое. Рассмотрим произвольную клетку a^i первого разложения. Пусть она содержит клеток, ребер и вершин разложения C лежащих <u>внутри</u> нее соответственно

$$\gamma_{i2}, \gamma_{i1}, \gamma_{i0}, \qquad (2I)$$

тогда поскольку вершин и ребер разложения C, принадлежащих краю a^i одно и то же количество ℓ, то в силу (II)

$$\gamma_{i2} - \gamma_{i1} + \gamma_{i0} = 1 \qquad (22)$$

Число клеток γ_2 разложения C равняется

$$\gamma_2 = \sum \gamma_{i2} \quad i = 1, \ldots, \alpha_2 \qquad (23)$$

Число вершин γ_0 разложения C будет равняться

$$\gamma_0 = \sum \gamma_{i0} + \alpha_0 + m \qquad (24)$$

где m - число новых вершин, появившихся на старых ребрах разложения A от второго разбиения B; также число ребер γ_1 разложения C будет равняться

$$\gamma_1 = \sum \gamma_{i1} + \alpha_1 + n, \qquad (25)$$

где n - разница между числом старых ребер разложения A и новых ребер, появившихся на них от разложения B. Очевидно, что каждая новая вершина на старом ребре увеличивает на единицу число ребер, т.е.

$$m = n. \qquad (26)$$

Тогда компонируя эти γ_i, получим

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = \sum \gamma_{i0} + \alpha_0 + m - \left(\sum \gamma_{i1} + \alpha_1 + n\right) + \sum \gamma_{i2} = \sum_i (\gamma_{i0} - \gamma_{i1} + \gamma_{i2}) +$$

$$+ \alpha_0 + m - \alpha_1 - n = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2. \qquad (27)$$

<u>Определение</u>. Эйлерова характеристика любого клеточного разложения компактной поверхности (возможно с краем) называется <u>эйлеровой характеристикой</u> поверхности.

<u>Следствие</u>. Число циклов q, которое можно вынуть из любого клеточного разложения поверхности V без нарушения ее связности не зависит от клеточного разложения поверхности.

<u>Определение</u>. Это число q называется порядком связности поверхности.

Теорема. Если поверхность несвязна - имеет p_0 компонент, то

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2p_0 - q, \qquad (28)$$

где

$$q = p_1. \qquad (29)$$

Действительно, поскольку для каждой компоненты V_i будет выполняться соотношение

$$\alpha_{0i} - \alpha_{1i} + \alpha_{2i} = 2 - q_i, \quad i = 1, \dots p_0 \qquad (30)$$

то суммируя эти равенства, получим

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - q, \qquad (31)$$

т.е. (28).

Следствие. Поскольку q очевидно является топологическим инвариантом (определен через связность поверхности), то и эйлерова характеристика поверхности является ее топологическим инвариантом.

Следствие. Порядок связности q поверхности легко подсчитать по формуле (I). Например, I) тетраэдр имеет

$$\alpha_0 = 4, \ \alpha_2 = 4, \ \alpha_1 = 6 \Rightarrow \chi = 2, \qquad (32)$$

значит

$$q = 0, \qquad (33)$$

2) куб имеет $\alpha_0 = 8, \ \alpha_2 = 6, \ \alpha_1 = 12 \Rightarrow \chi = 2$ (34)

значит

$$q = 0; \qquad (35)$$

3) сфера гомеоморфна кубу (с.6), значит, для нее также $\chi = 2, \quad q = 0,$ (36)

4) цилиндр имеет клеточное разложение из двух клеток:

$$\alpha_2 = 2, \ \alpha_1 = 6, \ \alpha_0 = 4, \qquad (37)$$

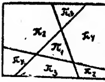
значит $\chi = 0$, но $r = 2$, значит $k = 0$. (38)

5) для листа Мебиуса можно также рассмотреть двухклеточное разложение, для него будет

$$\alpha_2 = 2, \ \alpha_1 = 6, \ \alpha_0 = 4 \Rightarrow \chi = 0 \qquad (39)$$

откуда также $q = 2$, но $r = 1$, т.е.

$$k = 1 \qquad (40)$$



6) для проективной плоскости клеточное разложение с. 16 дает

$$\alpha_2 = 4, \ \alpha_0 = 3, \ \alpha_1 = 6 \Rightarrow \chi = 1 \qquad (41)$$

т.е. $q = 1$. (42)

7) бутылка Клейна с разложением с.41 дает

$$\alpha_2 = 8, \ \alpha_0 = 8, \ \alpha_1 = 16 \Rightarrow \chi = 0 \qquad (43)$$

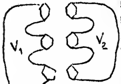
откуда $q = 2$, (44)

Следствие. Порядок связности компактной поверхности - конечное число.

Вычислению характеристики Эйлера поверхности V способствует теорема, позволяющая производить его по частям.

Теорема. При склеивании двух поверхностей их краями складываются их характеристики Эйлера.

Пусть имеем две поверхности V_1 и V_2, каждая с r контурами ℓ_1^i и ℓ_2^i $(i=1,\dots,r)$. Поставим их во взаимно однозначное соответствие $\ell_1^i \leftrightarrow \ell_2^i$ (45)



Можно всегда считать, переходя в случае необходимости к подразбиениям, что соответствующие контуры имеют одно и то же число вершин и ребер β_0^i и β_1^i. Тогда после склеивания соответствующих контуров сумма характеристик двух поверхностей V_1 и V_2 будет равняться характеристике Эйлера склеенной поверхности плюс число вершин β_0^i и минус число ребер β_1^i каждого контура

$$\chi(V_1)+\chi(V_2)=\chi(V)+\sum(\beta_0^i-\beta_1^i) \tag{46}$$

откуда, т.к. для каждого контура $\beta_0^i=\beta_1^i$, получаем

$$\chi(V_1)+\chi(V_2)=\chi(V) \tag{47}$$

Теорема. Сфера с r дырками Q_r имеет характеристику Эйлера равную

$$\chi=2-r \tag{48}$$

Поскольку характеристика сферы равна 2(с.55), а клетки I(с.53) и заклеивая r клетками нашу поверхность, получаем сферу, то в силу (47)

$$\chi+r=2, \tag{49}$$

откуда следует (48).

Теорема. Сфера с p ручками Q_{p0} имеет характеристику Эйлера равную

$$\chi=2-2p \tag{50}$$

Сфера с p ручками получается от склеивания сферы с $2p$ дырками(характеристики $2-2p$) с ручками - цилиндрами (характеристики 0). Тем самым в силу предыдущих теорем

$$2-2p+0=\chi. \tag{51}$$

Следствие. Тор, как сфера с одной ручкой, имеет характеристику равную нулю

$$\chi=0 \tag{52}$$

т.е. его порядок связности равен 2:

$$q=2 \tag{53}$$

Следствие. Крендель, как сфера с двумя ручками, имеет эйлерову характеристику равную $\chi=-2$, и, значит, порядок связности равный

$$q=4 \tag{54}$$

§ 6. Декартова характеристика пространства E.

К эйлеровой характеристике компактной поверхности приводит естественным образом обобщение измерения длины отрезка, площади многоугольника, величины угла в евклидовой геометрии.

Как помним ([II], с.47), измерить длину отрезка в E_n - это значит установить отображение отрезков на неотрицательные числа - меры их длин (которые в просторечии мы договорились (с.9) называть расстоянием между их концами)

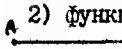
$$[AB]\to \ell\in \mathbb{R}^+. \tag{I}$$

так, что

1) конгруэнтным отрезкам соответствуют равные числа

$$[AB] \cong [A'B'] \Rightarrow \ell(AB) = \ell(A'B'), \quad (2)$$

2) функция ℓ аддитивна



$$C \text{ л.м. } A, B \Rightarrow \ell(AB) = \ell(AC) + \ell(CB), \quad (3)$$

3) любому наперед заданному отрезку соответствует единица

$$\forall [EF] \longrightarrow \ell(EF) = 1. \quad (4)$$

Если исходить из аксиоматики Шура ([II], с.26), для которой неопределяемым понятием вместо конгруэнтности является движение, то первое условие (2) будет требованием инвариантности при движении.

Тогда для топологического пространства E (в частности для компактной поверхности (с.4I) прямым обобщением меры длины будет так называемая декартова характеристика ([I8]).

Измерить топологическое пространство E – это значит каждому пространству E поставить в соответствие число, называемое его декартовой характеристикой

$$E \to \psi \in \mathbb{R} \quad (5)$$

такое, что

I) она является топологическим инвариантом: если пространства гомеоморфны, то их декартовы характеристики равны

$$E \approx E' \Rightarrow \psi(E) = \psi(E'); \quad (6)$$

2) она аддитивна

$$E = E^1 \cup E^2 \mid E^1 \cap E^2 = \varnothing \Rightarrow \psi(E) = \psi(E^1) + \psi(E^2); \quad (7)$$

3) любому открытому κ-шару $\mathring{D}_\kappa$ можно поставить в соответствие I

$$\forall \mathring{D}_\kappa \longrightarrow \psi(\mathring{D}_\kappa) = 1. \quad (8)$$

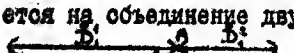
Докажем, что для компактной 2-поверхности V, если одноточечному множеству (0-шару $\mathring{D}_0$) поставить в соответствие I

$$\psi(\mathring{D}_0) = 1, \quad (9)$$

то декартова характеристика совпадает с эйлеровой.

Лемма. Декартова характеристика открытого отрезка $\mathring{D}_1$ при условии (9) равна −I, открытого круга $\mathring{D}_2$ +I.

Действительно, I) открытый отрезок $\mathring{D}_1$ любой точкой A разбивается на объединение двух открытых отрезков $\mathring{D}_1^1$ и $\mathring{D}_1^2$ и самой точки A



$$\mathring{D}_1 = \{\mathring{D}_1^1, \mathring{D}_1^2, A\} \quad (10)$$

Тогда в силу второго требования (7)

$$\psi(\mathring{D}_1) = \psi(\mathring{D}_1^1) + \psi(\mathring{D}_1^2) + \psi(A). \quad (11)$$

Но отрезки $\mathring{D}_1^1$ и $\mathring{D}_1^2$ гомеоморфны самому $\mathring{D}_1$, и поэтому по условию (6) их характеристики $\psi(\mathring{D}_1^1)$ и $\psi(\mathring{D}_1^2)$ равны характеристике $\psi(\mathring{D}_1)$

$$\psi(\mathring{D}_1^1) = \psi(\mathring{D}_1), \quad \psi(\mathring{D}_1^2) = \psi(\mathring{D}_1) \quad (12)$$

а из условия (9)

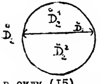
$$\psi(A) = 1. \quad (13)$$

Тогда из (II)

$$\psi(\mathring{D}_1) = \psi(\mathring{D}_1) + \psi(\mathring{D}_1) + 1 \quad (14)$$

получим
$$\psi(\breve{D}_1) = -1 \qquad (15)$$

2) Аналогично, открытый круг $\mathring{D}_2$ любая открытая его хорда – открытый отрезок $\breve{D}_1$ разобьет на три части



$$\mathring{D}_2 = \{\mathring{D}_2^1, \mathring{D}_2^2, \breve{D}_1\} \qquad (16)$$
и значит в силу (7)
$$\psi(\mathring{D}_2) = \psi(\mathring{D}_2^1) + \psi(\mathring{D}_2^2) + \psi(\breve{D}_1), \qquad (17)$$
где
$$\psi(\mathring{D}_2^1) = \psi(\mathring{D}_2), \quad \psi(\mathring{D}_2^2) = \psi(\mathring{D}_2) \qquad (18)$$
и в силу (15)
$$\psi(\breve{D}_1) = -1 \qquad (19)$$
Тогда из (17) получим
$$\psi(\mathring{D}_2) = 1 \qquad (20)$$

Теорема. Декартова характеристика компактной поверхности V при (9) совпадает с ее эйлеровой характеристикой.

Действительно, рассмотрим конечное клеточное разложение компактной поверхности V. Пусть оно имеет клетки, ребра и вершины соответственно в количествах
$$\alpha_2, \quad \alpha_1, \quad \alpha_0. \qquad (21)$$
Рассмотрим соответствующие им открытые 2-клетки, гомеоморфные открытым кругам $\mathring{D}_2^i$, открытые ребра $\breve{D}_1^j$ и вершины $\mathring{D}_0^k$. Тогда в силу свойства аддитивности (7)
$$\psi(V) = \alpha_0\,\psi(\mathring{D}_0) + \alpha_1\,\psi(\breve{D}_1) + \alpha_2\,\psi(\mathring{D}_2), \qquad (22)$$
т.е. в силу (9), (15) и (20)
$$\psi(V) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(V). \qquad (23)$$

§ 7. Ориентируемость компактной поверхности

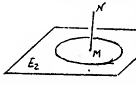
I. Двусторонние, односторонние поверхности (двусторонность, односторонность). Сколько сторон у медали? Две: аверс и реверс. А у поверхности? Например, сколько сторон у сферы? Также две: внешняя и внутренняя. Сфера, как известно ([9], с.55) делит точки пространства, ей не принадлежащие, на два класса: внешние точки и внутренние. Из внешних точек сфера видна с одной стороны, из внутренних – с другой, сферу можно покрасить с одной стороны в один цвет, а с другой стороны – в другой. Т.Е.сфера – двусторонняя поверхность.

Но так будет не у всех поверхностей. Если рассмотреть лист Мебиуса и начать закрашивать его поверхность, начиная с какой-нибудь точки M, то в какой-то момент мы попадем в ту же точку M как бы „с другой стороны" – закрасим весь лист одной краской. Лист Мебиуса – односторонняя поверхность. Также бутылка Клейна, проективная плоскость – односторонние поверхности.

как это выразить математически? Сначала это выразим математически на модели в евклидовом пространстве. С каждой точкой M поверхности V в евклидовом пространстве E_3 свяжем нормаль- прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную касательной плоскости поверхности в точке M и на ней возьмем на небольшом расстоянии от точки M две симметричные относительно M' точки N и N'. При движении точки M по любой замкнутой линии на V в случае двусторонней поверхности, когда точка M вернется в себя, то точка N также перейдет в себя,а в случае односторонней - в симметричную N'.

Но это, если рассматривать поверхность V в E_3. А если рассматривать поверхность V только как двумерное топологическое многообразие без объемлющего пространства E_3? Как же эти точки N и N' отобразить на самое V?

У нас была модель Федорова пространства E_3 на плоскости E_2



([II],с.27): каждая точка $N \in E_3$ изображается на E_2 ориентированной окружностью $k(M,r)$ с центром M -основанием перпендикуляра, опущенного из точки N на плоскость E_2, радиуса $r = |MN|$ (т.е. окружностью пересечения сферы $S(M,|MN|)$ с плоскостью E_2) и ориентированной так, что из точки N эта ориентация видна как движение по часовой стрелке. Эта окружность определяет также ориентированный круг (диск), для которого она является краем.

Поскольку в достаточно малой окрестности каждой своей точки M поверхность мало отличается от своей касательной плоскости, то можно перенести эту конструкцию и на поверхность V. А именно, точка N пространства E_3, достаточно близкая к поверхности изобразится диском пересечения поверхности V со шаром $D(M,|MN|)$, где M -основание перпендикуляра, опущенного из точки N на поверхность, и ориентированным так, чтобы ориентация его края из точки N была видна движением по часовой стрелке; назовем такой ориентированный диск N-диском с центром в точке M, а ее край N-циклом.

Рассмотрим на поверхности W любой замкнутый контур ℓ, ориентированный диск с центром в одной его точке M_1 и будем передвигать его так, чтобы центры этих дисков принадлежали ℓ и соседние диски были образами близких точек N, т.е. одинаково ориентированы. Совокупность таких N-дисков назовем ℓ-цепочкой их. Тогда, если поверхность

двусторонняя, то продвигаясь по ℓ -цепочке, придем к точке M_1 с диском с той же ориентацией, а в случае односторонней поверхности - возможно и о противоположной.

Теперь, согласно нашей установке на получение новых фактов (с.3) нам остается трансформировать на поверхности V определение N- диска, N-цикла, ориентации его, ℓ -цепочки дисков, одинаковость ориентации двух соседних N -дисков таким образом, чтобы их можно было бы выразить через топологические понятия.

Если на поверхности задано клеточное разложение, то вместо диска естественно взять одну клетку этого разложения, вместо соответствующего N-цикла - край этой клетки (Э-цикл - элементарный цикл клеточного разложения , вместо соседних N-дисков - соседние клетки - клетки, имеющие общее ребро, под ориентацией клетки естественно понимать ориентацию ее края: порядок вершин соответствующего элементарного цикла, для которого соседними вершинами являются вершины, имеющие общее ребро; две соседние клетки будем считать одинаково ориентированными, если их краи (э-циклы) одинаково ориентированы, т.е. на общем ребре устанавливают противоположный порядок. Тогда вместо замкнутой ℓ-цепочки дисков будем иметь цепочку клеток (с.42)

$$\pi_1, \ldots, \pi_k, \qquad (I)$$

две любые соседние из которых имеют общее ребро и последняя совпадает с первой (замкнутая цепочка клеток). Итак, мы пришли к определению

Определение. Связная компактная поверхность называется двусторонней, если в любом ее клеточном разложении клетки любой замкнутой цепочки можно ориентировать так, что любые две соседние ее клетки будут ориентированы одинаково. В противном случае поверхность называется односторонней.

Очевидно, что если поверхность односторонняя, то существует замкнутая цепочка клеток (I) таких, что любые соседние одинаково ориентируемы, а последняя и первая противоположно ориентируемы. Такая цепочка называется дезориентирующей. Ее предъявление и доказывает односторонность поверхности.

2. Ориенируемые и неориентируемые поверхности. Для определения двусторонности поверхности можно дать простой критерий.

Теорема. Для того, чтобы связная компактная поверхность V была двусторонней, необходимо и достаточно, чтобы в любом ее клеточном разложении K все его клетки можно было ориентировать так, чтобы любые две соседние клетки были одинаково ориентированы.

Достаточность. Пусть все клетки клеточного разложения K ориентированы так, что любые две соседние клетки ориентированы одинаково. Тогда сужение этой ориентации на любую замкнутую цепочку даст двусторонность поверхности V.

Необходимость. Рассмотрим любую одну клетку π_0 клеточного разложения K поверхности V и произвольно ее ориентируем – получим ориентированную клетку π_0^+. Эта ориентация на π_0 однозначно наведет ориентацию на любой клетке $\sigma \in K$ таким образом. В силу связности поверхности V клетки π_0 и σ можно соединить цепочкой

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \sigma \tag{2}$$

Последовательно, начиная с π_1, ориентируем клетки этой цепочки так, чтобы любые две соседние были одинаково ориентированы. Полученная таким образом ориентация клетки σ даст ориентированную клетку σ^+. В силу двусторонности поверхности V любая другая цепочка, соединяющая π_0 с σ

$$\pi_0, \pi_1', \dots, \sigma \tag{3}$$

даст на σ ту же ориентацию, ибо в противном случае объединение этих цепочек дало бы дезориентирующую замкнутую цепочку,

$$\sigma, \dots, \pi_1, \pi_0, \pi_1', \dots, \sigma, \tag{4}$$

что противоречит двусторонности поверхности.

Полученная таким образом ориентация всех клеток $\sigma \in K$ будет удовлетворять условию теоремы. Действительно, рассмотрим две любые соседние клетки σ_1 и σ_2 с установленной таким образом ориентацией, т.е. ориентированные клетки σ_1^+ и σ_2^+. Рассмотрим цепочки одинаково ориентированных между особой клеток, соединяющих π_0^+ с σ_1^+ и с σ_2^+

$$\pi_0^+, \pi_1^+, \dots, \sigma_1^+, \qquad \pi_0^+, \pi_1'^+, \dots \sigma_2^+ \tag{5}$$

Тогда поскольку цепочка

$$\sigma_1^+, \dots \pi_1^+, \pi_0^+, \pi_1'^+, \dots \sigma_2^+ \tag{6}$$

имеет все соседние клетки одинаково ориентированными и она в силу двусторонности поверхности V не дезориентирующая, то клетки σ_1^+ и σ_2^+ одинаково ориентированы.

Эта теорема приводит к естественности такого определения.

<u>Определение.</u> Связная компактная поверхность V называется <u>ориентируемой</u>, если все клетки ее любого клеточного разложения K можно ориентировать так, чтобы любые две соседние клетки были ориентированы одинаково. В противном случае поверхность называется <u>неориентируемой</u>.

<u>Следствие.</u> Для того, чтобы поверхность была двусторонней (односторонней) необходимо и достаточно, чтобы она была ориентируема (неориентируема).

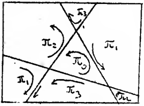
Тем самым, понятия двусторонности и ориентируемости поверхности являются синонимами, поэтому мы первое, как более по виду сложное, откинем.

<u>Следствие.</u> На ориентируемой поверхности возможны две ориентации клеток, удовлетворяющие определению ориентируемой поверхности. Каждую

из них назовем стороной поверхности.

Следствие. Для того, чтобы поверхность была неориентируемой достаточно, чтобы в одном ее клеточном разложении существовала дезориентирующая цепочка.

Легко видеть, что сфера и тор – ориентируемы, лист Мебиуса – не ориентируем. Докажем, что проективная плоскость также неориентируема.



Действительно, рассмотрим ее клеточное разложение в виде четырех треугольных клеток (с.16) Занумеруем их согласно чертежу $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ Ориентируем произвольно одну из них – клетку π_0 Эта ориентация вызовет ориентацию остальных клеток такую, чтобы они были одинаково с ней ориентированы. Получим тогда, что любые из них будут друг с другом ориентированы противоположно. Можно указать и дезориентирующую цепочку, например, π_1, π_0, π_2.

§ 8. Разрезы и склеивания

С ориентируемостью или неориентируемостью поверхности связан вопрос о различных видах возможных на ней разрезах.

Каждый замкнутый разрез позволяет построить цепочку из клеток,

содержащих ребра и вершины этого разреза и каждые две соседние из которых имеют общее ребро, не принадлежащее разрезу. Если мы начнем, например, от точки A, то обойдя контур разреза, подойдем опять к ней и двигаясь также дальше попадем в клетку, примыкающую к первому ребру $\langle AB \rangle$

$$\pi_1, \ldots, \pi_{n+1} \tag{I}$$

Произвольная ориентация первой клетки π_1 индуцирует ориентацию клеток всей цепочки (I) такую, что две соседние клетки цепочки (I) ориентированы одинаково. Эта ориентация клеток цепочки (I) наводит и ориентацию контура разреза.

Но здесь возможны два случая:

1) либо π_{n+1} будет совпадать с исходной клеткой π_1

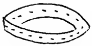
$$\pi_{n+1} = \pi_1, \tag{2}$$

2) либо π_{n+1} будет смежной $-\pi_1'$ к π_1 по ребру $\langle AB \rangle$

$$\pi_{n+1} = \pi_1'. \tag{3}$$

Однобережный разрез. Во втором случае дальнейший обход вдоль того же контура в конце концов приведет к клетке π_1, т.е. разрез приведет к одной дыре с одним краем, состоящим из дважды взятого исходного контура. Такой разрез называется однобережным. Он получается,

например, у листа Мебиуса, если его разрезать по пояску.



Легко видеть, что в случае (3) цепочка (I) будет дезориентирующей, поскольку на ребре $\langle AB\rangle$ между π_1 и π_{n+1} эти клетки устанавливают одно направление.

Таким образом, однобережный разрез возможен лишь у неориентируемых поверхностей.

Более того, однобережный разрез всегда существенный (с.43) – не разбивает поверхность, ибо от клетки π_1 до клетки π_{n+1} и после разреза можно пройти по цепочке новой поверхности (с. 46).

Двубережный разрез. В первом случае (2) при разрезе получаем две дырки. Тогда разрез называется двубережным.

Он может быть как существенным, так и несущественным.

Если разрез существенный, то (с. 46) от клетки π_1 до клетки π_1'

смежной к π_1 по ребру $\langle AB\rangle$, принадлежащему разрезу, можно перейти по цепочке клеток

$$\pi_1, \sigma_1, \quad ; \sigma_k, \pi_1' \qquad (5)$$

где соседние клетки π_i, σ_{i+1} не имеют общее ребро принадлежащим разрезу. По этой цепочке (5) любая ориентация клетки π_1 перенесется на противоположную по разрезу клетку π_1'.

Если после всех существенных разрезов исходной поверхности V, она станет ориентируемой V^* (а так будет всегда (с. 65), то полученная таким образом ориентация клетки π_1' не будет зависеть от цепочки (5). Если при этом клетки π_1 и π_1' окажутся ориентированными одинаково, т.е. на их общем ребре $\langle AB\rangle$ устанавливают противоположную ориентацию, то продвигая π_1 по одному берегу, а π_1' - по другому, получим, что любые две противоположные через разрез клетки π_i и π_i' будут ориентированы одинаково, т.е. на разрезе с обеих сторон устанавливают противоположные ориентации (с.62), т.е. если двигаться вдоль одного берега по направлению ориентации, то соответствующая точка второго берега будет двигаться против ориентации.

Такой разрез называется двубережным разрезом I рода. Очевидно, что он будет всегда в случае ориентируемой исходной поверхности: у ориентируемой поверхности все существенный разрезы - двубережные I рода.

Например, так будет, если тор разрезать по меридиану

Поскольку поверхность V^*-ориентируема, то если клетки π_1 и π_1' при переносе по цепочке (5) окажутся противоположно ориентированными, т.е. на общем ребре $\langle AB\rangle$ устанавливают одну ориентацию, то так будет и для любой пары смежных по разрезу

клеток π_i и π_i' - на обоих берегах устанавливается одна ориентация: если точку двигать по одному берегу в направлении ориентации, то соответствующая точка второго берега будет также двигаться в направлении ориентации. Такой разрез называется двубережным 2-го рода. Так будет, например, у бутылки Клейна, если ее разрезать по горлышку.

Поскольку в этом случае цепочка (5) будет дезориентирующей, то поверхность V будет неориентируемой.

Таким образом, в случае ориентируемой поверхности возможен существенный разрез лишь I рода, когда ориентация поверхности на противоположных берегах наводит противоположную ориентацию (направление).

§ 9. Классификация замкнутых поверхностей.

Топологическая классификация поверхностей будет заключаться в том, чтобы в один класс собрать гомеоморфные поверхности и выбрать одну каноническую поверхность этого класса.

Чтобы доказать, что два множества гомеоморфны, достаточно указать гомеоморфизм, который переводит одно в другое. Чтобы доказать, что они не гомеоморфны, достаточно указать различные их топологические инварианты. Тем самым нам нужно найти полную систему топологических инвариантов замкнутых поверхностей.

Теорема Мебиуса. Всякая замкнутая ориентируемая поверхность V гомеоморфна сфере с p ручками.

Определение. Связное клеточное разложение называется простым, если любой замкнутый разрез из его ребер разбивает его (нарушает его связность). Поверхность называется простой, если имеет хотя бы одно простое клеточное разложение.

Лемма I. Всякая простая поверхность с одним контуром гомеоморфна кругу, причем этот гомеоморфизм продолжает любой гомеоморфизм контура поверхности на край круга.

Пусть клеточное разложение имеет вершины, ребра и клетки соответственно в количестве

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2. \tag{I}$$

Если

$$\alpha_2 = 1 \tag{2}$$

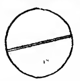
-клеточное разложение состоит из одной клетки, то утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для

$$\alpha_2 = n-1, \tag{3}$$

докажем его для

$$\alpha_2 = n. \tag{4}$$

Из n клеток всегда найдется одна такая, что удалив ее, получим связное разложение с одним контуром. Тогда по предположению индукции его можно отобразить на круг, откинутую клетку – тоже, потом оба круга отобразим на полукруги, и, значит, все клеточное разложение из n клеток отобразится на один круг.



Лемма.2. Всякая простая поверхность с r контурами V_r гомеоморфна сфере r дырками Q_r, причем гомеоморфизм является продолжением любых гомеоморфизмов, переводящих контуры поверхности V_r в края дырок Q_r. Пусть утверждение верно для

$$r \le n-1. \tag{5}$$

Докажем, что оно верно для

$$r = n \tag{6}$$

Рассмотрим два любых контура b_1, b_2 на V_r и два любых контура b_1', b_2' на Q_r. Сделаем разрезы: ℓ, соединяющий контур b_1 с контуром b_2 и ℓ', соединяющий контур b_1' с контуром b_2'. Получим поверхности V_{r-1} и Q_{r-1} с $n-1$ контурами. По предположению индукции существует гомеоморфизм, переводящий V_{r-1} в Q_{r-1} такой, что контуры b_1 и b_2 перейдут в b_1' и b_2' и любые две лежащие друг против друга точки разреза ℓ перейдут в лежащие друг против друга точки разреза ℓ'. Обратное склеивание дает искомый гомеоморфизм.

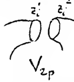
Доказательство теоремы Мебиуса. Если поверхность V имеет порядок связности q, то (с. 47) на ней существует q простых циклов, одновременно существенных. Пусть максимальное число непересекающихся из них, т.е. максимальное число непересекающихся простых циклов, которые одновременно можно удалить из поверхности без нарушения связности, равно p. Поскольку

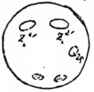
$$p \le q \tag{7}$$

и q –конечно (с.52), то число p ограничено. Сделаем эти p разрезов z_i. Получим поверхность V_{2p}. В силу ориентируемости V все эти разрезы двубережные (с.63), т.е. поверхность V_{2p} имеет $2p$ дырок. Поверхность V_{2p} – простая, ибо если бы на ней существовал хотя бы один существенный разрез z, то в силу теоремы с.46 существовал бы разрез z', внутренний к V_{2p}, т.е. не пересекающийся с ее краями и существенный, а потому у поверхности V существовал бы разрез z_{p+1} существенный и не пересекающийся ни с одним из p существенных разрезов z_i, что противоречит смыслу числа p.

Но в силу леммы 2 (с.65) простая поверхность V_{2p} о $2p$ дырками гомеоморфна сфере Q_{2p} с $2p$ дырками.

Склеиваниями поверхности V_{2p}, обратными к сделанным разрезам z_i, вернемся к поверхности V. Гомеоморфизм $\mathcal{J}$ между V_{2p} и Q_{2p} перенесет эти склеивания V_{2p} в склеивания Q_{2p} дающие поверх-





ность Q_{p0} гомеоморфную исходной V

$$V - Q_{p,0} \quad . \qquad (8)$$

Что же на Q_{2p} эти склеивания дадут? Рассмотрим на Q_{2p} две дырки $z_i^{1'}$ и $z_i^{2'}$ гомеоморфные дыркам на V_{2p}, получающимся от одного разреза z_i. Вытянем их из сферы наружу в виде трубок.

Поскольку при гомеоморфизме $\mathcal{J}$ ориентация сохраняется, а на разных берегах z_i^1, z_i^2 двубережного разреза при движении точки по одному берегу по направлению ориентации ей соответствующая на другом берегу точка будет двигаться против направления ориентации (с.63), то также будет и с соответствующими им точками в гомеоморфизме $\mathcal{J}$ на сфере Q_{2p}. Поэтому обратному склеиванию на V_{2p} будет соответствовать на сфере склеивание этих трубок снаружи, т.е. получим так называемую ручку - цилиндр, заклеивающий две дыры.

Поступая так с каждой парой дырок на сфере Q_{2p}, соответствующих паре дырок z_i^1, z_i^2, полученных от одного разреза, получим сферу $Q_{p,0}$ с p ручками.

Определение. Число p называется родом ориентируемой поверхности. Сфера с ручками называется нормальной (или канонической) формой Клейна.

Аналогично верна теорема (без доказательства): Всякая неориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с $p \geq 1$ дырами, заклеенными листами Мебиуса.

Определение. Это число p называется родом неориентируемой поверхности.

Найдем простую связь рода p ориентируемой поверхности с порядком ее связности.

Теорема. Ориентируемая поверхность рода p имеет эйлерову характеристику

$$\chi = 2 - 2p \qquad (9)$$

Действительно, поскольку эйлерова характеристика является топологическим инвариантом (с.55), то в силу теоремы Мебиуса это достаточно проверить для сферы с p ручками, для которой это было получено на с. 56.

Следствие. Порядок связности q ориентируемой замкнутой поверхности равняется удвоенному ее роду p

$$q = 2p. \qquad (10)$$

Следствие. Эйлерова характеристика ориентируемой поверхности - четное число.

Следствие. Из q сильно независимых простых циклов комплекса K_1^* ориентируемой замкнутой поверхности лишь половина $p = \frac{q}{2}$ взаимно не пересекаются.

Теорема. Неориентируемая поверхность рода p имеет характеристику Эйлера равную

$$\chi = 1 - p. \qquad (11)$$

Поскольку лист Мебиуса имеет эйлерову характеристику равную 0 (с.55), а сфера с $p+1$ дырами $1-p$ (с.56), то в силу теоремы с.56

$$\chi = 1 - p \qquad (12)$$

Например, поскольку проективная плоскость имеет эйлерову характеристику равну I (с.55), то она гомеоморфна сфере с одной дыркой, заклеенной листом Мебиуса.

Значит, обратно, вырезая в проективной плоскости одну дыру, получим лист Мебиуса.

Тогда рассмотрим множество хорд одной окружности евклидовой

плоскости. Их можно поставить во взаимно однозначное соответствие с их полюсами на плоскости расширенной несобственными точками. Эти полюсы заполняют всю внешнюю область этой расширенной плоскости по отношению к этой окружности, т.е. образуют лист Мебиуса. Тем самым множество хорд любой окружности на E_2 изоморфно листу Мебиуса.

Следствие. Ориентируемая поверхность рода p с r дырами имеет эйлерову характеристику

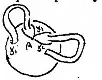
$$\chi = 2 - 2p - r \qquad (13)$$

Следствие. Неориентируемая поверхность рода p с r краями имеет эйлерову характеристику

$$\chi = 1 - p - r \qquad (14)$$

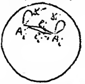
§ 10. Многоугольники Пуанкаре

Рассмотрим нормальную форму ориентируемой поверхности рода p - сферу с p ручками c_i, $i = 1, \dots p$.



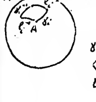
Возьмем на ней произвольную точку A и захлестнем из нее петлей γ_i каждую ручку c_i. Можно считать, что эта петля γ_i и является основанием одного кон-

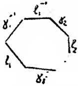
ца ручки C_i, т.е. что именно γ_i является соответствующим существенным разрезом. Сделаем разрез по γ_i и втянув полученный хобот C_i, получим две дыры – одну с контуром γ_i, проходящим через фиксированную точку A и парный к γ_i контур γ_i'.



Соединим точку A с соответствующей точкой A_i' на γ_i' произвольным путем ℓ_i, принадлежащим сфере, и сделаем также по нему разрез. Тем самым получим вместо двух дыр γ_i и γ_i' одну.

Делая так с каждой ручкой, получим одну дыру на сфере, т.е. (с.7) оставшаяся поверхность будет гомеоморфна многоугольнику, каждые четыре соседние ребра которого склеиваясь дают одну ручку и идут в направлении



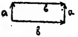


$$\gamma_1 \ell_1 \gamma_1^{-1} \ell_1^{-1} \gamma_2 \ell_2 \gamma_2^{-1} \ell_2^{-1} \ldots \tag{1}$$

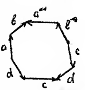
где под γ^{-1} понимается линия γ, ориентированная в противоположном направлении. Этот многоугольник называется многоугольником Пуанкаре для поверхности V.

Тем самым получаем теорему.

Теорема. Всякая замкнутая ориентируемая поверхность рода p получается склеиванием сторон многоугольника с числом сторон $4p$ и так, что его последующие стороны склеиваются по закону



$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots \tag{2}$$



Например, тор получается склеиванием противоположных сторон четырехугольника.

Крендель получается от склеивания восьмиугольника

$$a b a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1} \tag{3}$$

Более того, в силу того, что на сфере с p ручками параллели и меридианы всех ручек являются сильно независимыми существенными циклами (с.44), то из высказанной теоремы получим следствие.

Следствие. В многоугольнике Пуанкаре, соответствующем замкнутой ориентируемой поверхности, склеиваемые ребра соответствуют сильно независимым существенным циклам поверхности.

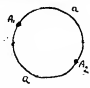
Аналогично рассуждая про сферу, заклеенную $p+1$ листами Мебиуса, получим в силу теоремы с.66 такую теорему.

Теорема. Всякая замкнутая неориентируемая поверхность получается склеиванием сторон $2p$ -угольника по закону

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots \tag{4}$$

Например, как видели проективная плоскость гомеоморфна диску с отождествленными диаметрально противоположными точками края (с.7)

Разбив край диска двумя точками на два отрезка, получим многоугольник Пуанкаре проективной плоскости в виде двуугольника, из которого проективная плоскость получается склеиванием по закону



$$aa. \tag{5}$$

ГЛАВА III. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

§ I. Топологически правильные многогранники

Определение. Компактная связная поверхность с фиксированным конечным клеточным разложением на ней называется топологическим многогранником. Клетки, ребра и вершины этого клеточного разложения называются соответственно гранями, сторонами и вершинами многогранника. Определение. Топологический многогранник называется правильным, если

1) все его грани имеют одно и то же число n вершин (а значит, и сторон);

2) все его вершины имеют одно и то же число s примыкающих к ним граней (а значит и ребер).

Тогда каждая грань поставит n ребер, т.е. α_2 граней дадут $\alpha_2 n$ ребер, но каждое ребро входит в эту совокупность два раза – в две смежные грани, т.е.

$$\alpha_1 = \frac{n\alpha_2}{2} \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{n}. \tag{I}$$

Аналогично рассуждая провершины, получим

$$\alpha_1 = \frac{s\alpha_0}{2} \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{2\alpha_1}{s}. \tag{2}$$

Подставляя полученные значения α_2 и α_0 в формулу Эйлера (с. 52)

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - q, \tag{3}$$

получим соотношение между числами n, s, α_1 и q для топологически правильных многогранников

$$\frac{2\alpha_1}{s} + \frac{2\alpha_1}{n} - \alpha_1 = 2 - q, \tag{4}$$

из которого делением на $2\alpha_1$ получим

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{2-q}{2\alpha_1}. \tag{5}$$

Определение. Топологический многогранник называется простым, если он гомеоморфен сфере, т.е. (с.55)

$$q = 0 \tag{6}$$

и, значит, в силу теоремы Эйлера (3)

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2. \tag{7}$$

Эта формула и является собственно формулой Эйлера.

а) Простые топологически правильные многогранники

Теорема. Существует не более пяти типов простых топологически правильных многогранников.

Подставляя (6) в (5), получим

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_1}, \qquad (8)$$

т.е.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{s}>\frac{1}{2} \qquad (9)$$

Значит, одно из $\frac{1}{n}, \frac{1}{s}$ больше $\frac{1}{4}$.

Если

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{4}, \qquad (10)$$

то

$$n<4, \qquad (11)$$

но по определению грани (с.69, с.39)

$$n\geq 2 \qquad (12)$$

значит в случае (11) возможны два подслучая

$$n=2,\quad n=3 \qquad (13)$$

Аналогично, если

$$\frac{1}{s}>\frac{1}{4}, \qquad (14)$$

то

$$s<4 \Rightarrow s=2,\quad s=3. \qquad (15)$$

т.к. из определения клетки следует, что $s\geq 2$.

При (13_1) из (9) получаем, что s – любое, т.е. многогранник состоит из s двуугольников с общими вершинами

Моделью такого многогранника в E_3 является сфера с двуугольниками, имеющими общие вершины, объединение которых заполняет сферу ([12], с.43) (апельсин со снятой коркой)

$$n=2,\ \forall s\in N \mid s\geq 2 \qquad (16)$$

Аналогично при (15_1) получим из (9), что n –любое

$$s=2,\ \forall n\geq 2 \qquad (17)$$

т.е. многогранник состоит из двух n-угольных клеток с общими вершинами. Моделью такого многогранника является сфера, разбитая экватором на два полушария, с n вершинами на этом экваторе.

Откинем случаи (13_1) и (15_1).

Тогда в случае (13_2) из (9) и $s\geq 2$ следует

$$\frac{1}{s}>\frac{1}{6} \Rightarrow s<6 \qquad (18)$$

т.е.

$$3\leq s<6 \Rightarrow s=3,4,5. \qquad (19)$$

Итак, в случае (13_2) возможны лишь значения

$$n=3,\quad s=3,4,5 \qquad (20)$$

Аналогично, случай (15_2) дает значения

$$s=3,\quad n=3,4,5 \qquad (21)$$

Тогда формулы (8), (I), (2) позволят по значениям n, s определить число ребер α_1, граней α_2 и вершин α_0 соответствующего многогранника

$$\{n,s\} \xrightarrow{(8)} \alpha_1 \xrightarrow{(1),(2)} \alpha_0, \alpha_2 . \qquad (22)$$

Отсюда получим, что, кроме (I6), (I7) возможны не более пяти типов простых топологически правильных многогранников, соответствующих строчкам таблицы

N	n	s	α_1	α_2	α_0	Название
I.	3	3	6	4	4	тетраэдр Q^4
2.	4	3	I2	6	8	куб (гексаэдр) Q^6
3.	3	4	I2	8	6	октаэдр Q^8
4.	3	5	30	20	I2	икосаэдр Q^{20}
5.	5	3	30	I2	20	додекаэдр Q^{12}

То, что такие многогранники действительно существуют, докажем на модели в виде метрически правильных многогранников в E_3 (с. 76).

Заметим, что если заменить вершины многогранника на грани

$$\alpha_2^* = \alpha_0, \quad \alpha_0^* = \alpha_2, \quad \alpha_1^* = \alpha_1, \quad s^* = n, \quad n^* = s, \qquad (23)$$

то многогранник (I6) , состоящий из s двугольников перейдет в многогранник (I7), состоящий из двух s -угольных клеток, куб перейдет в октаэдр, икосаэдр – в додекаэдр. Они будут двойственными многогранниками и теоремы об одних будут переходить в теоремы об других.

б) Топологически правильные многогранники, гомеоморфные тору

Если (с.56)многогранник гомеоморфен тору, то

$$q = 2 \qquad (24)$$

и формула (5) дает

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \qquad (25)$$

т.е. одно из $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{s}$ больше или равно $\frac{1}{4}$

Если $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{4}$ т.е. $s \leq 4$ (26)

то поскольку $2 \leq s$

оно принимает значения

$$s = 2, \quad s = 3, \quad s = 4, \qquad (27)$$

тогда из (25) соответственно получим,

$$\frac{1}{n}=0 \Rightarrow n\text{-нет}\ ,\ \frac{1}{n}=\frac{1}{6}\Rightarrow n=6,\ \ \frac{1}{n}=\frac{1}{4}\Rightarrow n=4. \qquad (28)$$

Если

$$\frac{1}{n}\geq\frac{1}{4}, \qquad (29)$$

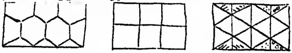
то добавляется случай

$$n=3,\ \ s=6. \qquad (30)$$

Итак, для топологически правильных многогранников, гомеоморфных тору, число вершин n любой грани и число s граней, примыкающих к любой вершине, могут образовывать лишь следующие комбинации

$$1)\ n=6,\ s=3, \qquad 2)\ n=4,\ s=4, \qquad 3)\ n=3,\ s=6. \qquad (31)$$

То, что эти соотношения реализуются, т.е. существуют правильные клеточные разложения тора со значениями (31), доказывается такими прямоугольниками Пуанкаре (с.67), склейка которых дает многогранники, гомеоморфные тору



(32)

§ 2. Метрически правильные многогранники

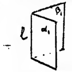
Поскольку евклидово пространство является моделью топологического пространства, то в нем можно рассматривать модели многогранников.

Определение. Многогранником в E_3 называется поверхность, состоящая из конечного числа плоских простых многоугольников.

Определение. Многогранник называется выпуклым, если относительно плоскости любой грани все его вершины лежат по одну сторону.

Напомним некоторые определения из элементарной геометрии.

Определение. Внутренними точками двугранного угла с осью ℓ,



образованного двумя полуплоскостями α_1, β_1 с границей ℓ, называются точки, которые относительно плоскости α, содержащей полуплоскость α_1, лежат в том же полупространстве, что и точки полуплоскости β_1, и наоборот.

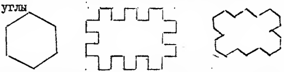
Следствие. Тем самым выпуклый многогранник лежит внутри каждого двугранного угла, образованного полуплоскостями, содержащими смежные грани, для которого осью является прямая, содержащая общее ребро этих смежных граней.

Определение. Линейным углом двугранного угла называется плоский угол, который получается в сечении двугранного угла с любой плоскостью, перпендикулярной его оси.

Определение. Многогранным углом S_n $(n>2)$ с вершиной в точке S называется поверхность, образованная объединением внутренних точек плоских углов с вершиной в точке S и имеющих общие стороны.

Напомним, что в E_3 две фигуры F и F' называются конгруэнтными, если существует движение, переводящее одну в другую.

Многоугольник называется правильным, если конгруэнтны все его стороны и углы.



Многоугольник называется выпуклым, если относительно каждой прямой, содержащей его сторону, все вершины его, не принадлежащие этой стороне, лежат по одну сторону.

Многогранный угол называется правильным, если конгруэнтны все его двугранные углы и все его плоские углы.

Многогранный угол называется выпуклым, если относительно любой плоскости, содержащей его грань, все остальные его точки лежат по одну сторону.

Таким образом, выпуклый многогранный угол лежит внутри каждого своего двугранного угла.

Определение. Многогранник в E_3 называется метрически правильным, если I) все грани его -конгруэнтные между собой правильные много - угольники; 2) все многогранные углы его - конгруэнтные между собой правильные многогранные углы.

Замечание I. Тем самым у метрически правильных многогранников:

I) все ребра конгруэнтны между собой,

2) все плоские углы конгруэнтны между собой,

3) все двугранные углы конгруэнтны между собой.

Замечание 2. Метрически правильный многогранник является топологически правильным (с.69).

Метрически правильные многогранники делятся на выпуклые и невыпуклые: звездчатые.

Теорема. Для того, чтобы выпуклый многогранник был метрически правильным, необходимо и достаточно, чтобы

I) каждая грань имела одно и то же число вершин

2) к каждой вершине примыкало одно и то же число граней,

3) все ребра были конгруэнтны между собой,

4) все двугранные углы были конгруэнтны между собой.

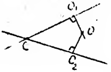
Действительно, необходимость очевидна из замечаний I),2); докажем достаточность.

Если многогранник - выпуклый, то каждая грань - выпуклый многоугольник, а если у двух выпуклых многоугольников одно и то же число n вершин и конгруэнтны стороны, то они правильные и конгруэнтны между собой (и, значит, все плоские углы конгруэнтны между собой).

Также в силу выпуклости многогранника будет выпуклым каждый его многогранный угол, а два выпуклых многогранных угла, имеющих одно и то же число s ребер и конгруэнтные двугранные углы, являются правильными и конгруэнтными между собой.

Докажем, что вокруг правильного многогранника (выпуклого) можно описать сферу.

Лемма. (без доказательства). Перпендикуляры к сторонам угла в точках O_1, O_2, равноудаленных от вершины C угла

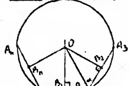


$$|O_1C| = |O_2C| \quad (1)$$

пересекаются в точке O, принадлежащей углу

$$O \in \angle O_1 C O_2. \quad (2)$$

Лемма. Перпендикуляры к сторонам выпуклого правильного многоугольника, проведенные через их середины, проходят через одну точку O.



Действительно, пусть выпуклый правильный многоугольник $A_1 \ldots A_n$ имеет сторону длины $2a$ и n сторон.

Тогда т.к. в силу выпуклости равные углы - внутренние, а сумма внутренних углов многоугольника равна

$$(n-2)\pi, \quad (3)$$

то каждый угол равен

$$2\alpha = \frac{n-2}{n}\pi. \quad (4)$$

Пусть перпендикуляры, проведенные к сторонам $[A_1A_2]$ и $[A_2A_3]$ в их серединах B_1, B_2 пересекаются в точке O

$$\perp^{B_1}_{[A_1A_2]} \cap \perp^{B_2}_{[A_2A_3]} = O. \quad (5)$$

Точка O будет лежать относительно прямой (A_1A_2) по ту же сторону, что и весь многоугольник. Из элементарных соображений получим

$$|OA_2| = \frac{a}{\cos\alpha} \quad (6)$$

$$|OB_1| = |OB_2| = a\,tg\,\alpha. \quad (7)$$

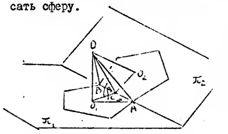
Повторяя те же рассуждения про стороны $[A_1A_2]$ и $[A_nA_1]$, получим, что точка пересечения перпендикуляров к сторонам $[A_1A_2]$ и $[A_nA_1]$ через их середины, лежит на первом перпендикуляре по ту же сторону, что и весь многоугольник и на расстоянии $|OB_1|$, т.е. совпадает с точкой O.

Повторяя эти рассуждения про три любые соседние стороны, получим искомое утверждение.

Следствие I. Вокруг правильного выпуклого многоугольника можно описать окружность с центром в точке O и радиуса $\frac{a}{\cos\alpha}$.

Аналогичным свойством будут обладать и выпуклые правильные многогранники.

Теорема. Вокруг выпуклого правильного многогранника можно описать сферу.



Пусть выпуклый правильный многогранник имеет длину каждого ребра равную $2a$, плоские углы – равные 2α и двугранные углы – 2β.

Рассмотрим две клетки π_1 и π_2, примыкающие друг к другу по ребру $[AB]$.

Пусть C – середина ребра $[AB]$ и O_1, O_2 – центры этих клеток.

Тогда перпендикуляры в этих клетках, проведенные к ребру $[AB]$ через точку C, пройдут соответственно через точки O_1 и O_2, т.е. угол $\angle O_1CO_2$ будет линейным углом двугранного угла, содержащего клетки π_1 и π_2, и, значит,

$$\widehat{O_1CO_2} = 2\beta \tag{8}$$

Перпендикуляры к клеткам π_1 и π_2 в их центрах O_1, O_2 перпендикулярны к (AB) и проходят соответственно через точки O_1, O_2 плоскости (O_1CO_2), перпендикулярной к (AB)

$$(O_1CO_2) \perp (AB), \tag{9}$$

потому принадлежат плоскости (O_1CO_2) и, значит, пересекаются

$$\perp_{\pi_1}^{O_1} \cap \perp_{\pi_2}^{O_2} = O. \tag{10}$$

Поскольку

$$|O_1C| = |O_2C|, \tag{11}$$

то в силу леммы точка O лежит внутри двугранного угла, образованного клетками π_1 и π_2, т.е. с той же стороны относительно каждой грани, что и весь многогранник.

Тогда последовательно рассматривая $\triangle O_1CA$, $\triangle OO_1C$, $\triangle OAC$, получим

$$|O_1C| = a\,tg\alpha, \quad |OO_1| = |O_1C|\,tg\beta = a\,tg\alpha\,tg\beta, \tag{12}$$

$$|OC| = \frac{|O_1C|}{\cos\beta} = \frac{a\,tg\alpha}{\cos\beta}, \quad |OA|^2 = a^2 + |OC|^2 = a^2\left(1 + \frac{tg^2\alpha}{\cos^2\beta}\right). \tag{13}$$

Из (12_2) следует, что перпендикуляры через центры всех клеток к этим клеткам проходят через одну точку O. Действительно, рассматривая клетку π_1 совместно с любой ей смежной клеткой, как с клеткой π_2, получим, что точка пересечения любого такого перпендикуляра с $\perp_{\pi_1}^{O_1}$ будет находиться от O_1 на расстоянии (12_2) и по ту же сторону, где лежит весь многогранник, т.е. эта точка будет совпадать с точкой O.

Аналогично рассуждая про клетку π_2, получим, что все перпендикуляры к смежным клеткам через их центры пройдут через точку и т.д. в силу связности многогранника все такие перпендикуляры пройдут через точку O.

Тогда из (I3) $|OA|$ – постоянная величина для данного многогранника. Поскольку A – любая его вершина, то все вершины правильного многогранника лежат на сфере с центром в точке O и радиуса $|OA|$.

Многогранник вписан в эту сферу.

Следствие I. Проектируя выпуклый правильный многогранник из центра описанной сферы на эту сферу, получим, что он гомеоморфен сфере (т.е. является простым (с.69)) и, значит, как и она имеет порядок связности равный нулю $q=0$. (I4)

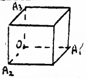
Следствие 2. В силу (I4) для выпуклых правильных многогранников имеется собственно формула Эйлера

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2. \qquad (I5)$$

Следствие 3. Выпуклые метрически правильные многогранники являются простыми топологически правильными, т.е. (с. 7I) их может быть не более пяти.

Доказательство их существования состоит в их предъявлении.

Теорема. Существует куб Q^6.

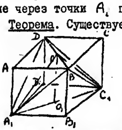


Рассмотрим три одной длины и взаимно перпендикулярные вектора, исходящие из одной точки O

$$\overline{OA}_1, \quad \overline{OA}_2, \quad \overline{OA}_3 . \qquad (I6)$$

Плоскости $(OA_1A_2), (OA_2A_3), (OA_3A_1)$ и плоскости, проходящие через точки A_i параллельно плоскостям $(OA_jA_k)_{i\neq j\neq k}$ породят куб.

Теорема. Существует правильный тетраэдр Q^4.



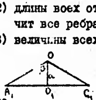
Пусть Q^6 – куб с вершинами A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 и длиной стороны a.

Точки A_1, B, C, D не лежат в одной плоскости (т.к. прямые (A_1C_1) и (BD) лежат в параллельных плоскостях $(ABCD)$ и $(A_1B_1C_1D_1)$ и не параллельны между собой). Поэтому они определяют тетраэдр с вершинами в них. Этот тетраэдр – правильный в силу теоремы с. 73 т.к.

I) он выпуклый – как всякий тетраэдр,

2) длины всех сторон равны $a\sqrt{2}$, потому равны между собой, и значит все ребра конгруэнтны,

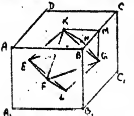
3) величины всех двугранных углов равны, т.к. величина линейного угла каждого равна одному и тому же



$$|OO_1| = a, \quad |A_1C_1| = a\sqrt{2}, \quad tg\,\beta = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \qquad (I7)$$

и, значит, все двугранные углы конгруэнтны.

Теорема. Существует правильный октаэдр Q^8.



Пусть Q^6 -куб и E, F, G, H, K, L - центры его граней. Они образуют правильный октаэдр. Действительно,

а) Если длина ребра куба равна a, то длина каждого ребра построенного октаэдра равна в силу $|KG|^2 = |KM|^2 + |MG|^2$ величине

$$|KG| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \tag{18}$$

т.е. все ребра имеют одну длину, а потому конгруэнтны.

б) Рассмотрим все двугранные углы одного многогранного угла, например, при вершине K. Они получаются один из другого вращением вокруг (KL) на углы в $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, потому конгруэнтны.

Вращая окраэдр вокруг других осей, соединяющих центры параллельных граней куба, получим, что все двугранные углы октаэдра конгруэнтны. Тогда в силу теоремы с. 73 окраэдр - правильный.

Перед теоремой о существовании правильного додекаэдра докажем две леммы.

Лемма I. Угол правильного пятиугольника равен

$$\frac{3}{5}\pi. \tag{19}$$

Это прямо следует из того, что сумма внутренних углов любого простого n -угольника равна $\sum \alpha_i = (n-2)\pi$.

Лемма 2. Существуют в пространстве три отрезка, исходящие из одной точки и образующие друг с другом угол в $\frac{3}{5}\pi$.

Рассмотрим векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ равной длины I и между которыми угол α равен $\frac{3}{5}\pi$ и вектор $\bar{e}_3$ длины I, им перпендикулярный, и возьмем их в качестве репера $\mathcal{R}\{O, \bar{e}_i\}$. Для него будет

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = 1,\ g_{12} = \cos\alpha,\ g_{31} = 0,\ g_{32} = 0,\ g_{33} = 1. \tag{20}$$

Докажем, что существует вектор

$$\bar{u} = u^i \bar{e}_i, \tag{21}$$

наклоненный к векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ под тем же углом

$$\alpha = \frac{3}{5}\pi. \tag{22}$$

Поскольку вектор $\bar{u}$ должен быть равнонаклонен к векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, то и его ортогональная проекция на плоскость $(O\bar{e}_1\bar{e}_2)$ также будет равнонаклоненной к $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, т.е. коллинеарна вектору $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$. Значит, в качестве искомого вектора можно взять

$$\bar{u} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + u^3\bar{e}_3. \tag{23}$$

Тогда чтобы вектор $\bar{u}$ был наклонен к $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ под углом α достаточно, чтобы он был наклонен под этим углом к $\bar{e}_1$, т.е.

$$\bar{u}\cdot\bar{e}_1 = u\cos\alpha, \qquad u^2 = \bar{u}^2, \tag{24}$$

или $\quad 1+\cos\alpha = u\cos\alpha, \qquad 2+2\cos\alpha + {u^3}^2 = u^2,$ (25)

откуда

$$ {u^3}^2 = \left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 - 2(1+\cos\alpha). \tag{26}$$

Значит, остается лишь доказать, что для $\alpha = \frac{3}{5}\pi$ правая часть (26) является положительной величиной. Обозначим

$$ -\cos\alpha = x, \tag{27}$$

тогда нужно доказать, что $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 - 2(1-x) > 0,$ (28)

, т.е. разделив на $(1-x)$, что

$$(1-x) > 2x^2 \Longrightarrow 1-x-2x^2 > 0 \tag{29}$$

но $\quad x = -\cos 108^\circ = \sin 18^\circ$

и из $\quad 18^\circ < 30^\circ \quad$ следует $\quad \sin 18^\circ < \sin 30^\circ,$ (30)

т.е.

$$\left.\begin{array}{l} x < \frac{1}{2} \\ x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow 2x^2 < \frac{1}{2} \end{array}\right\} x + 2x^2 < 1, \tag{31}$$

откуда получаем (29).

Таким образом, полученные из формулы (26) значения u^3 отличаются лишь знаком, т.е. по одну сторону от плоскости $(O\bar{e}_1\bar{e}_2)$ найдется лишь один такой отрезок.

Лемма 3. Все многогранные углы с тремя плоскими углами, равными $\frac{3}{5}\pi$ конгруэнтны между собой.

Действительно, отложив на сторонах двух таких многогранных углов повекторам одной и той же длины, получим

два репера

$$\mathcal{R}\{O, \bar{e}_i\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}'\{O', \bar{e}_i'\} \tag{32}$$

(Всегда переименованием векторов $\bar{e}_1'$ и $\bar{e}_2'$ можно даже добиться, чтобы они были одинаково ориентированы). Поскольку при этом

$$g_{ij} = g_{ij}', \qquad \text{где } g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j, \qquad g_{ij}' = \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j', \tag{33}$$

то существует движение (и даже I рода) которое переведет первый во второй, а именно, которое осуществляется равенством координат относительно реперов (32): $M \mid \overline{OM} = x^i \bar{e}_i \longrightarrow M' \mid \overline{O'M'} = x^i \bar{e}_i',$ (34)

ибо тогда в силу (33)

$$|MN|^2 = g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) = g_{ij}'(y^i - x^i)(y^j - x^j) = |M'N'|^2 \tag{35}$$

Теорема. Существует правильный додекаэдр Q^{12}.

Рассмотрим правильный пятиугольник и к каждой его вершине по одну сторону от плоскости пятиугольника пристроим ребро, о котором говорится в лемме, и построим на них правильные пятиугольники. Получим корзиночку с дном и боковыми гранями

-правильными пятиугольниками. В силу доказательства теоремы с.75 перпендикуляры к этим шести правильным пятиугольникам через

их центры $O_1, \ldots O_6$ пройдут через одну точку O. Симметрия относительно точки O даст вторую корзиночку - крышку, которая и дополнит первую до додекаэдра, гранями которого будут 12 правильных пятиугольников. В силу леммы 3 (с.78) все многогранные углы будут конгруэнтны и правильны, т.е. полученный додекаэдр- метрически правильным.

Следствие. Центры всех граней правильного додекаэдра образуют правильный 20-гранник - икосаэдр Q^{20}.

Эти многогранники называются платоновыми телами.

Как мы много раз видели с геометрией тесно связана теория групп; напромним некоторые сведения из нее, которые нам понадобятся.

§ 3. Элементы теории групп

Если группа G ([II], с.14) состоит из конечного числа элементов, то она называется конечной и число ее элементов называется ее порядком; группа, состоящая из бесконечного числа элементов называется бесконечной.

Коммутативная группа ([II], 15) называется абелевой. Для нее основная композиция называется сложением и применяется аддитивная форма записи.

Для $n \in \mathbb{Z}$ введем обозначения

$$\text{при } \begin{cases} n>0 & a^n = a\cdot a\cdot \ldots\cdot a, \\ n=0 & a^n = a_0 \ (\text{или } e), \text{ где } a_0 \text{- нейтральный элемент} \\ n<0 & a^n = a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\ldots\cdot a^{-1} \end{cases} \qquad (1)$$

(или для абелевой группы в аддитивной записи

$$\text{при } \begin{cases} n>0 & na = a+a+\ldots+a, \\ n=0 & na = a_0, \quad \text{где } a_0 \text{- нейтральный элемент} \\ n<0 & na = (-a)+(-a)+\ldots+(-a). \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда

$$a^p\cdot a^q = a^{p+q}, \qquad p,q\in\mathbb{Z} \qquad (3).$$

(или для абелевой группы

$$pa + qa = (p+q)a. \qquad (4)$$

Образующими группы G называются элементы минимальной совокупности ее элементов

$$a_1, \ldots, a_k \qquad (5)$$

такие, что всякий элемент группы G является произведением степеней этих элементов, т.е. в силу (1) выражается в виде произведения

этих элементов и им обратных

$$\forall g \in G \;\; \exists\, i_1,\dots i_k \in \mathbb{Z} \mid g = a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \ldots a_k^{i_k} \tag{6}$$

$$(\forall a \in A \;\; \exists\, \lambda^i \in \mathbb{Z} \mid a = \lambda^i a_i) \tag{7}$$

Группа G называется порожденной своими образующими. Если образующих-конечное число, то группа называется конечно порожденной.

Группа, имеющая одну образующую a

$$\forall g \in G \quad g = a^k \tag{8}$$

$$(\forall g \in A \;\; \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid g = ka) \tag{9}$$

называется циклической группой $H(a)$, порожденной элементом a.

Образующие могут удовлетворять соотношениям

$$R(a_i) \equiv a_1^{k_1} \cdot \ldots a_k^{k_k} = e \qquad (e = a_0) \tag{10}$$

$$(\text{или} \quad \exists\, \lambda^i \mid \lambda^i a_i = a_0), \tag{11}$$

которые называются соотношениями группы. (Группа определяется с точностью до изоморфизма своими образующими и соотношениями [20, с337])

В частности, если циклическая группа имеет соотношение

$$a^n = e \qquad (\vee \; na = a_0), \tag{12}$$

то она называется конечной циклической группой порядка n.

Если для элемента a группы G имеется соотношение (12), то n называется порядком элемента a.

Если группа не имеет соотношений, то она называется свободной. Свободная циклическая группа обозначается $\mathbb{Z}$, она изоморфна группе целых чисел.

Прямое произведение групп. Для группы $G_1(a_i)$ с композицией

$$g(a_1, a_2) = a_3 \tag{13}$$

и группы $G_2(b_j)$ с композицией

$$h(b_1, b_2) = b_3 \tag{14}$$

прямым произведением $G_1 \otimes G_2$ (в случае абелевых групп - прямой суммой $G_1 \oplus G_2$) называется группа G, являющаяся топологическим произведением (с.18) множеств элементов групп G_1 и G_2

$$G((a_i, b_j)) \tag{15}$$

с композицией

$$f\{(a_i b_j), (a_k b_k)\} = \{ g(a_i, a_k), h(b_j, b_k)\}. \tag{16}$$

Например, группа параллельных переносов плоскости $\mathbb{R}^2$

$$a^3 = a^1 + a^2, \quad b^3 = b^1 + b^2 \tag{17}$$

является произведением групп параллельных переносов двух прямых

$$a^3 = a^1 + a^2 \quad \text{и} \quad b^3 = b^1 + b^2. \tag{18}$$

§ 4. Группы самосовмещений (симметрий) метрически правильных выпуклых многоугольников

Определение. Движение плоскости E_2 (пространства E_3) сохраняющее фигуру F в E_2 (в E_3) называется самосовмещением (симметрией) фигуры F.

Множество самосовмещений данной фигуры F образует, очевидно, группу преобразований D_F – группу симметрий данной фигуры F.

Определение. Для фигуры $F \subset E_2$ точка O называется центром симметрии порядка n, если существует такое $n \geq 2$, $n \in N$ что все вращения на углы $\frac{2\pi}{k}$ $(k=1, \ldots n)$ вокруг точки O сохраняют фигуру F.

Например, для правильного треугольника его центр является центром его симметрии третьего порядка; для эллипса – его центр является центром симметрии порядка 2.

Определение. Для фигуры $F \subset E_2$. прямая ℓ называется осью симметрии, если симметрия плоскости E_2 относительно нее, сохраняет фигуру F (является ее симметрией).

Определение. Для фигуры $F \subset E_3$ точка O и плоскость σ называются соответственно центром и плоскостью ее симметрии, если симметрии пространства E_3 относительно них сохраняют фигуру F.

Для фигуры $F \subset E_3$ прямая ℓ называется осью ее симметрии порядка n, если существует такое $n \geq 2$, $n \in N$, что всякое вращение на угол $\frac{2\pi}{k}$ $(k \leq n, k \in N)$ вокруг прямой ℓ сохраняет фигуру F.

Центры, оси и плоскости симметрии фигуры F называются ее элементами симметрии.

Рассмотрим выпуклый метрически правильный многоугольник на E_2 т.е. выпуклый многоугольник, все стороны и углы которого конгруэнтны.

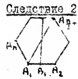
Сколько у него симметрий? В силу следствия с.75 вокруг выпуклого правильного многоугольника можно описать окружность. Тогда получим ряд следствий.

Следствие 1. Вращения на углы

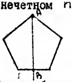
$$R_i: \quad \varphi_i = \frac{2\pi}{n} i \quad (i = 0, \ldots, n-1) \tag{I}$$

вокруг центра этой окружности являются симметриями правильного n-угольника (Центр описанной около правильного выпуклого многоугольника окружности является его центром симметрии порядка n).

Следствие 2. При четном n осями симметрии n-угольника являются прямые, соединяющие противоположные вершины (диагонали) $(A_i A_{i+\frac{n}{2}})$ и прямые, соединяющие середины противоположных сторон $(B_i B_{i+\frac{n}{2}})$.



При нечетном n осями симметрии правильного n-угольника являются прямые, соединяющие каждую вершину с серединой противоположной стороны.

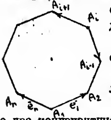


Тем самым всякий выпуклый правильный n-угольник имеет n осей симметрии.

Таким образом для любого выпуклого правильного P_n имеются $2n$ симметрий: n вращений вокруг точки O и n отражений относительно осей. Есть ли еще у него симметрии?

Теорема. Выпуклый метрически правильный n-угольник имеет $2n$ симметрий.

В силу приведенных следствий достаточно доказать, что таких симметрий не более $2n$. Симметрия любую вершину переводит в вершину, сторону – в сторону. Если она вершину A_1 переводит в вершину A_i, то вектора



$$\bar{e}_1 = \overline{A_1A_2}\,, \quad \bar{e}_2 = \overline{A_1A_n} \tag{2}$$

она должна переводить соответственно либо в

$$\bar{e}_1' = \overline{A_iA_{i+1}}\,, \quad \bar{e}_2' = \overline{A_iA_{i-1}}, \tag{3}$$

либо в

$$\bar{e}_1'' = \overline{A_iA_{i-1}}, \quad \bar{e}_2'' = \overline{A_iA_{i+1}}. \tag{4}$$

Но два конгруэнтные репера ($|\bar{e}_1| = |\bar{e}_1'|,\ |\bar{e}_2| = |\bar{e}_2'|,\ \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = \bar{e}_1'\cdot\bar{e}_2'$)

$$\mathfrak{R}\{A_1,\bar{e}_i\} \text{ и } \mathfrak{R}'\{A_i,\bar{e}_i'\} \quad \text{или} \quad \mathfrak{R}\{A_1,\bar{e}_i\} \quad \text{и } \mathfrak{R}''\{A_i,\bar{e}_i''\} \tag{5}$$

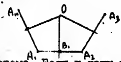
определяют (с.78) одно и только одно движение, а пар $\{\mathfrak{R},\mathfrak{R}'\}$ и $\{\mathfrak{R},\mathfrak{R}''\}$ $2n$ т.е. симметрий не более $2n$.

Следствие I. Всякое движение определенное реперами $\{\mathfrak{R},\mathfrak{R}'\}$ и $\{\mathfrak{R},\mathfrak{R}''\}$ и только такое, является симметрией многоугольника.

Следствие 2. Квадрат имеет 8 симметрий: 4 вращения вокруг точки O и 4 отражения относительно диагоналей и прямых, соединяющих середины противоположных сторон.

Правильный треугольник имеет группу симметрий порядка 6: 3 вращения вокруг точки O и 3 отражения относительно высот.

Лемма. Выпуклый метрически правильный многоугольник определяется тремя соседними своими вершинами.

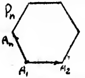


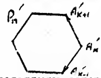
Действительно, тогда в силу леммы с. 74 определяется центр описанной окружности и многоугольник восстанавливается вращением вокруг него.

Теорема. Если у двух выпуклых правильных многоугольников P_n и P_n' равно число сторон и равны длины сторон

$$n = n', \quad 2a = 2a', \tag{6}$$

то они конгруэнтны $2n$ способами - существует $2n$ движений, переводящих первый вот второй.





Возьмем репер

$$\mathcal{R}\{A_1, \bar e_1 = \overline{A_1A_2}, \bar e_2 = \overline{A_1A_n}\} \tag{7}$$

и три произвольные соседние вершины второго A_{k-1}', A_k', A_{k+1}'.

Два движения, определяемые реперами

$$\mathcal{R}\{A_1, \bar e_i\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}'\{A_k', \bar e_1' = \overline{A_k'A_{k-1}'}, \bar e_2' = \overline{A_k'A_{k+1}'}\} \tag{8}$$

и

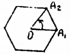
$$\mathcal{R}\{A_1, e_i\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}''\{A_k', \bar e_1'' = \overline{A_k'A_{k+1}'}, \bar e_2'' = \overline{A_k'A_{k-1}'}\} \tag{9}$$

переводит первый многоугольник в ему конгруэнтный, который совпадает со вторым в силу леммы.

Теорема. Группа симметрий многоугольника имеет две образующие.

Во-первых, очевидно, что всякая симметрия-вращение R_i на угол

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{n} i \tag{10}$$



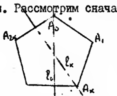
получается в результате композиции i вращений R_1 на угол

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{n} \tag{11}$$

Докажем, что существуют такие две симметрии - отражения S_0 и S_k композиция которых дает вращение R_1 а, значит, и любое R_i.

Будем различать многоугольники с четным числом вершин и с нечетным. Рассмотрим сначала второй случай

$$n = 2k + 1. \tag{12}$$



Через ℓ_i обозначим ось симметрии, проходящую через вершину A_i и через S_i -отражение относительно нее. Тогда

$$S_0 \circ S_k \tag{13}$$

является движением I-го рода, т.е. вращением и переводит точку A_0 в A_1

$$A_0 \xrightarrow{S_k} A_{2k} \xrightarrow{S_0} A_1, \tag{14}$$

т.е. будет вращением R_1 на угол φ_1.

Докажем, что любое отражение S_i является композицией одного из отражений S_0, S_k, например, S_0 и вращения R_ℓ. Действительно, отражение S_i переводит точку A_{i+k} в A_{i+k+1}, а S_0 точку A_{i+k} в A_{k-i}. Значит, нужно рассмотреть вращение, совмещающее A_{k-i} с A_{i+k+1}, т.е.

$$R_\ell : \ A_{k-i} \to A_{i+k+1}, \tag{15}$$

где

$$\ell = 2i + 1. \tag{16}$$

Таким образом

$$S_i = R_{2i+1} \circ S_0. \tag{17}$$

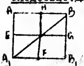
Для четного

$$n = 2k \tag{18}$$

доказательство аналогичное для образующих - отражений относительно

$$\ell_1 = (A_1 A_{k+1}) \quad \text{и} \quad m_1 = (B_1 B_{k+1}).$$

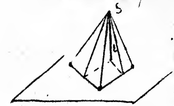
Следствие. Для квадрата, если обозначить через S_1 и T_1 симметрии относительно (A_1B) и (EG_1), то, например, симметрия S относительно (HF) будет равна



$$S = T_1 \circ S_1 \circ T_1 \circ S_1 \circ T_1. \qquad (19)$$

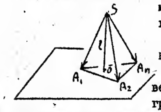
§ 5. Группы симметрий выпуклого правильного многогранного угла

Пусть имеем выпуклый правильный многогранный угол с вершиной S и s гранями.



Лемма I. Плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов перпендикулярно к плоскостям этих углов, пересекаются по одной прямой l – оси многогранного угла. Доказательство аналогично доказательству леммы с. 74.

Лемма 2. Произвольная плоскость σ перпендикулярная оси правильного многогранного угла пересекает его по правильному многоугольнику P_n. Каждая симметрия многогранного угла индуцирует на плоскости σ симметрию этого многоугольника P_n и обратно, всякая симметрия многоугольника P_n индуцирует симметрию многогранного угла



Следствие I. Выпуклый правильный s-гранный угол имеет $2s$ симметрий.

Следствие 2. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s$ – вектора одной длины, идущие по ребрам многогранного угла и занумерованные так, что соседние ребра имеют соседние номера. Тогда всякое движение, определяемое реперами

$$\mathcal{R}\{S, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}'\{S, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \bar{e}_{k-1}\}, \qquad (1)$$

и

$$\mathcal{R}\{S, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}''\{S, \bar{e}_k, \bar{e}_{k-1}, e_{k+1}\} \qquad (2)$$

и только они являются симметриями многогранного угла.

Следствие 3. Всякое движение, определяемое реперами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ является вращением вокруг оси l.

Следствие 4. Всякое движение, определяемое реперами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}''$ является отражением относительно плоскости, содержащей ось l и ось соответствующего многоугольника, т.е. при s четном – относительно плоскостей, соединяющих противоположные ребра, и относительно плоскостей, соединяющих биссектрисы противоположных граней, а при s нечетном – относительно плоскостей, соединяющих каждое ребро с биссектрисой противоположной грани.

Лемма. Правильный выпуклый многогранный угол определяется тремя соседними своими ребрами. Доказательство как для леммы с. 82.

Следствие. Если при движении D три соседние ребра одного выпуклого правильного многогранного угла переходят в три соседние ребра другого, то эти многогранные углы конгруэнтны. Действительно, это движение переводит первый угол в ему конгруэнтный, который имеет со вторым три общих соседних ребра, а потому с ним совпадает.

Теорема. Если у двух выпуклых метрически правильных многогранных углов S и S' конгруэнтны плоские и двугранные углы

$$\alpha = \alpha' \tag{3}$$

$$\beta = \beta' \tag{4}$$

то они конгруэнтны $2s$ способами. Возьмем три соседние ребра первого и построим на них равные по длине векторы

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \tag{5}$$

и такой же длины построим векторы по ребрам второго угла

:
$$\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_s. \tag{6}$$

Для реперов

$$\mathcal{R}\{S, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}'\{S', \bar{e}'_k, \bar{e}'_{k+1}, \bar{e}'_{k-1}\} \tag{7}$$

и

$$\mathcal{R}\{S, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}''\{S, \bar{e}'_k, \bar{e}'_{k-1}, \bar{e}'_{k+1}\} \tag{8}$$

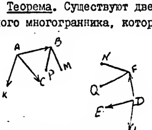
в силу (3), (4) будут равны метрические тензоры

$$g_{ij} = g'_{ij} \tag{9}$$

а потому они будут определять движение, переводящее в силу предыдущего следствия первый многогранный угол во второй.

§ 6. Группы симметрий правильного выпуклого многогранника

Теорема. Существуют две симметрии для любого правильного выпуклого многогранника, которые переводят один его плоский угол в любой другой.



Пусть

$$\angle BAC \quad \text{и} \ \angle EDF \tag{I}$$

два любых плоских угла многогранника и точки

$$B, A, C, \quad D, E, F \tag{2}$$

являются его вершинами.

Рассмотрим вектора

$$\bar{e}_1 = \overline{AB},\ \bar{e}_2 = \overline{AC} \ \text{и} \quad \bar{e}'_1 = \overline{DF},\ \bar{e}'_2 = \overline{DE} \quad (\text{и} \quad \bar{e}''_1 = \overline{DE},\ \bar{e}''_2 = \overline{DF}) \tag{3}$$

Возьмем в качестве $\bar{e}_3$ вектор $\overline{AK}$, исходящий из точки A по ребру, соседнему с $\overline{AB}$ (но не $\overline{AC}$), а в качестве $\bar{e}'_3$ – вектор $\overline{DL}$ –соседний с $\overline{DF}$.

Поскольку два многогранных угла A и D конгруэнтны, то конгруэнтны и реперы $\mathcal{R}\{A, \bar{e}_i\}$ и $\mathcal{R}'\{D, \bar{e}'_i\}$ (v $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}''\{D, \bar{e}''_i\}$). Они определяют движение (с. 78), переводящее в силу следствия с.85 многогран-

ный угол с вершиной в точке A в многогранный угол с вершиной D.

Докажем, что каждое из них сохраняет весь многогранник, т.е. является его симметрией. Пусть движение D переведет точку B в F. Докажем, что при этом движении многогранный угол многогранника с вершиной B перейдет в многогранный угол этого же многогранника с вершиной в точке F. Рассмотрим клетку, определяемую точкой A и векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$

$$KAB \ldots \tag{4}$$

и клетку, определяемую точкой D и векторами $\bar{e}_1'$ и $\bar{e}_3'$ – клетку

$$LDF \ldots \tag{5}$$

Это правильные многоугольники, а потому при движении D, поскольку три точки одного перейдут в три точки другого (с. 82), то они совпадут, и потому соседняя точка к B в нем – вершина M перейдет в N – соседнюю вершину к F. Также соседние вершины P в клетке $(ABC\ldots)$ и Q в клетке $(EDF\ldots)$ при движении D совместятся

$$P \to Q \tag{6}$$

т.е. три соседние ребра, исходящие из вершины B перейдут в три соседние ребра, исходящие из вершины F, а потому в силу следствия с. 85 многогранный угол B перейдет в многогранный угол F.

В силу связности многогранника, передвигаясь от клетки к любой другой, докажем что любой многогранный угол многогранника перейдет в многогранный угол того же многогранника.

Следствие. Правильный выпуклый многогранник имеет симметрий в два раза больше, чем число его плоских углов, т.е.(с. 69)

$$2\alpha_2 n = 2\alpha_0 s = 4\alpha_1 \tag{7}$$

§ 7. Группа симметрий куба

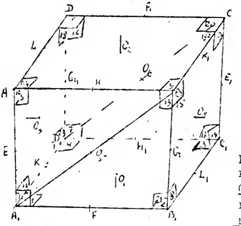
Число плоских углов у куба равно $6 \times 4 = 24$. Значит, согласно предыдущему следствию куб имеет 48 симметрий: 24 сохраняющие ориентацию пространства E_3 и 24 меняющие ее. Рассмотрим сначала первые.

Теорема. Все симметрии куба, не меняющие ориентацию пространства, являются вращениями относительно некоторых прямых.

Выделим в кубе любой плоский угол, например, согласно чертежу $\angle 1$. Всякий другой плоский угол $\angle i$ определит одну симметрию, сохраняющую ориентацию R_i и одну симметрию S_i, меняющую ее, и переводящую $\angle 1$ в $\angle i$.

Рассмотрим сначала плоские углы, лежащие в той же грани, что и $\angle 1$, т.е. углы $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$. Тогда сужение симметрии R_i на эту грань $A_1B_1C_1D_1$ будет вращением вокруг центра O_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ и, значит симметрии R_i $(i=2,3,4)$ будут вращениями куба вокруг оси (O_1O_3).

Поскольку все пары параллельных граней равноправны, то нужно рассмотреть вращения R_i $(i=5,6,7)$ и R_i $(i=8,9,10)$ соответственно вокруг других осей (O_3O_4) и (O_5O_6), соединяющих центры параллельных граней.



Они переведут соответственно $\angle$ I в $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8, \angle 9, \angle 10$. Симметрии R_i $(i=5,6,7)$ будут вращениями куба вокруг оси (O_3O_4). Симметрии R_i $(i=8,9,10)$ будут вращениями куба вокруг оси (O_5O_6). Тем самым вместе с тождественным преобразованием будем иметь уже I0 симметрий.

Дальше рассмотрим симметрии R_{11} и R_{12} переводящие $\angle 1$ в углы, соседние по вершине A_1. Симметрии R_{11} и R_{12} будут, очевидно, вращениями вокруг большой диагонали (A_1C).

Поскольку все большие диагонали куба равноправны, то рассмотрим вращения относительно других больших диагоналей: симметрии R_{13}, R_{14} - вращения вокруг диагонали (B_1D), симметрии R_{15}, R_{16} - вращения вокруг диагонали (C_1A) и симметрии R_{17}, R_{18} - вращения вокруг диагонали (D_1B). Симметрии R_i $(i=11,12,\dots,18)$ переведут угол $\angle 1$ в $\angle i$ $(11-18)$. Итак, вращения вокруг больших диагоналей дадут еще 8 симметрий.

Остальные 6 симметрий являются вращениями вокруг прямых, соединяющих середины противоположных параллельных ребер: R_i $(i=19,\dots 24)$ соответственно вокруг (EE_1), (GG_1), (FF_1), (HH_1), (KK_1), (LL_1). Они переведут $\angle 1$ в $\angle i$

Следствие. Прямые, соединяющие центры параллельных граней, большие диагонали и прямые, соединяющие середины параллельных противоположных ребер являются осями симметрии куба соответственно порядков 4, 3 и 2.

Теперь рассмотрим симметрии куба, меняющие ориентацию пространства- являющиеся движениями 2-го рода.

А) Симметрии относительно плоскостей, соединяющих противоположные параллельные ребра, - (AA_1CC_1), (A_1B_1CD), (A_1BCD_1), (B_1C_1AD), (ABC_1D_1), (BB_1DD_1).

Они переведут $\angle$ I соответственно в углы $\angle$I, $\angle$II, $\angle$I2, $\angle$I5, $\angle$I6, $\angle$3 и поэтому мы их обозначим $S_1, S_{11}, S_{12}, S_{15}, S_{16}, S_3$ (S_i переводят $\angle 1$ в $\angle i$)

Б) Симметрии относительно плоскостей, параллельных параллельным между собой граням (EGE_1G_1), (HFH_1F_1), (KLL_1K_1).

Они переведут угол $\angle 1$ в $\angle 19$, $\angle 2$, $\angle 4$ и поэтому мы их обозначим S_{19}, S_2, S_4.

В) Симметрия относительно центра O куба переведет $\angle 1$ в $\angle 20$: S_{20}.

Следствие. Куб имеет 9 плоскостей симметрии.

Теорема. Все симметрии куба можно представить в виде композиций из трех отражений от плоскостей (A_1DCB_1), (A_1D_1CB), (EGE_1G_1) т.е. через симметрии $\bar{S}_1 = S_{11}$, $\bar{S}_2 = S_{12}$, $\bar{S}_3 = S_{13}$ (I)

Действительно, непосредственно видим, что

$$S_1 = \bar{S}_1 \circ \bar{S}_2 \circ \bar{S}_1. \qquad (2)$$

Также в силу следствия с.84

$$S_2 = \bar{S}_3 \circ \bar{S}_2 \circ \bar{S}_3 \circ \bar{S}_2 \circ \bar{S}_3. \qquad (3)$$

Тем самым для сужения вращений R_i на грани куба, перпендикулярные осям вращения, имеем в каждой грани 2 отражения, которые в силу теоремы с.83 являются образующими всех симметрий квадрата, и мы сможем через соответствующие отражения в E_3 выразить все вращения R_i $(i=1,\ldots,10)$ и все симметрии S_{19}, S_2, S_4 и $S_1, S_{11}, S_{12}, S_{15}, S_{16}, S_3$.

Поскольку теперь все симметрии относительно плоскостей выражены, все большие диагонали будут равноправны, и если мы выразим через $\bar{S}_1, \bar{S}_2, S_3$ вращение вокруг одной большой диагонали, то также можно будет сделать для любой. Легко видеть, что

$$\bar{S}_2 \circ \bar{S}_1 = R_{11} \qquad (4)$$

Остается выразить вращения вокруг (EE_1), (GG_1). Поскольку они также равноправны, достаточно выразить одно, например R_{19}. Оно равно

$$R_{19} = \bar{S}_3 \circ S_1 \qquad (5)$$

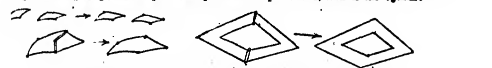
Умножая все вращения на одно отражение, например $\bar{S}_1$, получим и все симметрии 2-го рода.

ГЛАВА IУ. ГОМОЛОГИИ[*] И ГОМОТОПИИ

§ I. Группа циклов Z линейного комплекса K_1

Введем операцию сложения по $mod\,2$ циклов линейного комплекса K_1

Определение. Суммой n простых циклов по $mod\,2$ называется их объединение, из которого вынуты открытые ребра, принадлежащие четному числу из этих циклов, а также вершины, принадлежащие двум таким ребрам. Например, на чертеже нарисованы простые циклы и их суммы.



Сумма простых циклов по $mod\,2$, очевидно, ассоциативна

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3). \qquad (I)$$

*) $mod\,2$

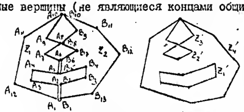
Определение. Сумма по $mod\,2$ простых циклов называется циклом.

Теорема. Всякий цикл z линейного комплекса K_1 можно представить в виде суммы простых циклов без общих ребер.

Пусть цикл z является суммой ($mod\,2$) двух простых циклов

$$z_1 = A_1 \ldots A_n \qquad \text{и} \qquad z_2 = B_1 \ldots B_m. \qquad (2)$$

Они могут иметь общими: I) целые ребра с их концами, 2) изолированные вершины (не являющиеся концами общих ребер) которые назовем узлами.



Вершины цикла z будут трех типов: I) принадлежащие лишь одному из слагаемых, например z_1, 2) являющиеся концом общего ребра ($A_1 = B_1$) 3) узлы ($A_3 = B_5$)

Тогда, складывая циклы z_1 и z_2 согласно определению, получим, что в сумме z : I) к вершине I типа примыкают два ребра одного из циклов z_1, z_2, 2) к вершине 2 типа также примыкают лишь два ребра от z, так как общее ребро пропадает (например, к вершине $A_2 = B_2$ примыкают ребра $[A_2A_3]$ и $[B_2B_1]$). Если цикл z не имеет точек 2 типа, то теорема очевидна. Если есть точка 2-го типа, то идя от нее ($A_2 = B_2$ и $A_6 = B_6$) по старым циклам в сторону от общего ребра, мы достигнем через точки I-го типа либо точки 2-го типа, либо точки 3-го типа, на которой замкнется простой цикл z_1', принадлежащий z и у которого все ребра одинарны. Если цикл является суммой трех циклов, то доказательство повторяется для суммы двух первых и третьего.

Определение. Простые циклы без общих ребер, сумма которых является данным циклом z, называются его составляющими.

Определение. Суммой ($mod\,2$) циклов называется сумма всех входящих в них простых циклов.

Добавим к множеству циклов данного линейного комплекса K_1 еще один элемент, назовем его нуль-циклом и будем обозначать O_z, и расширим операцию сложения циклов $mod\,2$ таким образом, чтобы он был нейтральным элементом

$$\forall z \qquad z + O_z = z \qquad (3)$$

Более того, будем считать, что если сумма($mod\,2$) каких-либо циклов равняется согласно определениям пустому множеству, то она равняется нуль циклу

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_k = \varnothing \overset{def}{\Longleftrightarrow} z_1 + z_2 + \ldots + z_k = O_z. \qquad (4)$$

Тогда, очевидно

$$\forall\ z_1, z_2 \qquad z_1 + z_2 = O_z \Longleftrightarrow z_1 = z_2. \qquad (5)$$

Теорема. Множество циклов Z данного линейного комплекса K_1 образует абелеву группу. Действительно ([II], с.I4) определенная сумма дает операцию

$$Z \times Z \to Z \qquad (6)$$

для которой имеется I)ассоциативность в силу (I), 2) нейтральный элемент O_z в силу (3), 3) для каждого элемента z ему обратный, а

именно в силу (5) им будет он сам $\;-z=z,$ (7)

4) поскольку определение суммы не зависит от порядка слагаемых, будет иметься коммутативность $\forall z_1, z_2 \quad z_1+z_2=z_2+z_1.$ (8)

Следствие. В силу (3), (5) каждый ненулевой цикл порождает циклическую группу 2-го порядка (с.80).

Напомним, что $\mathbb{Z}_2$ – поле вычетов по $mod\, 2$ состоит из множества двух элементов $\check{\xi}^i$, обозначаемых $\check{0}$ и $\check{1}$, в котором введены две операции: сложение по правилу $\check{0}+\check{0}=\check{0},\ \check{0}+\check{1}=\check{1},\ \check{1}+\check{0}=\check{1},\ \check{1}+\check{1}=\check{0},$ (9)

и умножение по правилу $\check{0}\cdot\check{1}=\check{0},\ \check{0}\cdot\check{0}=\check{0},\ \check{1}\cdot\check{0}=\check{0},\ \check{1}\cdot\check{1}=\check{1}$ (10)

Теорема. Группа Z циклов линейного комплекса K_1 является векторным пространством над полем вычетов по $mod 2$, если ввести операцию

$$Z(K_1)\times\mathbb{Z}_2\to Z(K_1) \qquad (11)$$

по правилу $\forall z\in Z(K_1) \quad \check{0}\cdot z=O_z,\quad \check{1}\cdot z=z$ (12)

Действительно, в силу (9). (10), (12) проверяются аксиомы умножения на скаляр векторного пространства ([7], с. 13)

$\check{1}\cdot z=z,\ (\check{\xi}^i\check{\xi}^k)z=\check{\xi}^i(\check{\xi}^k z)=\check{\xi}^k(\check{\xi}^i)z,\ (\check{\xi}^i+\check{\xi}^k)z=\check{\xi}^i z+\check{\xi}^k z,\ \check{\xi}^i(z_1+z_2)=\check{\xi}^i z_1+\check{\xi}^i z_2$ (13)

Более того, это векторное пространство – конечно мерное ([8], с.73)

§ 2. Базис векторного пространства

Как известно ([8] с. 73) в векторном пространстве $\bar{V}$ над полем P вектора $\bar{u}_i$ называются линейно независимыми, если

$$\check{\alpha}^i\bar{u}_i=\bar{O}\Longleftrightarrow\check{\alpha}^i=\check{0}. \qquad (\check{\alpha}^i\in P) \qquad (1)$$

и зависимы в противном случае. Векторное пространство называется n-мерным, если выполняется аксиома размерности ([8], с.73): Существует n линейно независимых векторов $\bar{e}_i$. Любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Совокупность любых n линейно независимых векторов $\bar{e}_i$ называется базисом векторного пространства $\bar{V}$. Каждый вектор $\quad\bar{u}\in\bar{V}$ (2)

единственным образом разлагается по данному базису $\bar{e}_i$, т.е.

$$\exists!\ u^i\in P \ |\quad \bar{u}=u^i\bar{e}_i. \qquad (3)$$

Элементы $u^i\in P$ называются координатами вектора $\bar{u}$ относительно базиса e_i.

Тогда определяется изоморфизм между $\bar{V}$ и $P\times P\times\ldots\times P$ по сложению

$$\bar{V}\sim\underline{P\times P\times\ldots\times P} \qquad (4)$$

если в $P\times P\times\ldots\times P$ определить сложение естественным образом (с.80)

$$(u^1,u^2,\ldots u^n)+(v^1,v^2,\ldots,v^n)=(u^1+v^1,\ u^2+v^2,\ldots,u^n+v^n) \qquad (5)$$

где u^i+v^i определяется сложением поля P.

Посмотрим как эти общие понятия интерпретируются для векторного пространства циклов $Z(K_1)$ над полем $\mathbb{Z}_2$ вычетов по $mod 2$.

В силу (12) с. 90, (3) с. 89 и (1) получим такое определение.

Определение. Циклы $\quad z_1,\ldots\ z_k$ (6)

линейно зависимы, если сумма некоторых из них дает нуль-цикл, и, значит, линейно независимы, если никакая сумма из них не дает нуль-цикл.

Также в силу (I2) с.90, (3)с.89 и (3)с.90 цикл z линейно зависит от циклов (6), если он является суммой (mod2) некоторых из них.

Теорема. Максимальное число $\bar{q}$ сильно независимых простых циклов (с.50) линейного комплекса K_1, $\quad z_1, \dots, z_{\bar{q}}$ (7)
линейно независимы. Действительно, сумма никаких циклов из (7) не может дать нуль-цикл $\qquad z_1 + \dots + z_{\ell'} = O_2 \qquad \ell' < \bar{q}$ (8)
так как различающие их ребра $a_1, \dots, a_{\ell'}$ (с.49) входят в эту сумму лишь один раз и поэтому не могут исчезнуть от сложения по mod2.

Теорема. $\bar{q}$ сильно независимые простые циклы (7) линейного комплекса K_1 образуют базис векторного пространства $Z(K_1)$.

В силу предыдущей теоремы достаточно будет доказать, что любой цикл z линейно выражается через циклы (7). В силу определения цикла (с.89) и свойству дистрибутивности (с.90) это достаточно будет доказать для простого цикла z_0: $\quad \exists\, \check{\xi}^i \in \mathbb{Z}_2 \mid \quad z_0 = \check{\xi}^i z_i$. (9)

Во-первых, в простой цикл z_0 обязательно входит хотя бы одно из различающих ребер
$$a_1, \dots, a_{\bar{q}} \qquad (10)$$
циклов (7), ибо в противном случае после изъятия из комплекса K_1 всех различающих ребер (I0) цикл z_0 целиком бы входил в этот оставшийся комплекс
$$K_1^* = K_1 \setminus \{a_1, \dots, a_{\bar{q}}\} \qquad (11)$$
и, значит, из него можно было бы вынуть любое открытое его ребро $a_{\bar{q}+1}$ без увеличения числа компонент K_1^*. Но в силу теоремы с.50 комплекс K_1^* имеет столько же компонент, что и K_1, значит, комплекс
$$K_1^{**} = K_1^* \setminus a_{\bar{q}+1} = K_1 \setminus \{a_1, \dots, a_{\bar{q}}, a_{\bar{q}+1}\} \qquad (12)$$
имеет столько же компонент, что и K_1; что противоречит тому, что в силу теоремы с. 50 порядок связности исходного комплекса K_1 равен $\bar{q}$.

Затем рассмотрим цикл
$$\tilde{z} = z_0 + \check{\varepsilon}^\kappa z_\kappa \quad \kappa = 1, \dots, \bar{q}, \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \check{\varepsilon}^\kappa = 1 \text{, если ребро } a_\kappa \text{ входит в } z_0, \\ \check{\varepsilon}^\kappa = 0 \text{ если } a_\kappa \text{ не входит в } z_0. \end{array} \right. \qquad (13)$$
Докажем, что цикл $\tilde{z}$ является нуль-циклом
$$\tilde{z} = z_0 + \check{\varepsilon}^\kappa z_\kappa = O_2 \qquad \kappa = 1, \dots, \bar{q} \qquad (14)$$
В противном случае, поскольку в нем все различающие ребра a_κ сократились, они в него не входили, и, значит, не входили бы в составляющие (с.89) его простые циклы, что противоречит тому, что мы только что доказали, что во всякий простой цикл комплекса K_1 должно входить по крайней мере одно из различающих ребер (I0). Тогда в силу (5)с.89
$$z_0 = \check{\varepsilon}^\kappa z_\kappa. \qquad (15)$$
Следствие. Векторное пространство Z циклов данного линейного комплекса K_1 имеет размерность n равную его порядку связности
$$p_1(K_1) = \bar{q} \qquad (16)$$

Следствие. В силу (4) с. 90 и (16) с. 9I векторное пространство $Z(K)$ изоморфно декартовому произведению

$$Z(K_1) \sim \underbrace{Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2}_{q} \tag{17}$$

Определение. Базис циклов линейного комплекса K_1, состоящий из его сильно независимых циклов, называется сильным базисом.

Не любой базис является сильным. Например, рассмотрим нарисованный линейный комплекс, по теореме Эйлера (с.5I) можно определить порядок его связности

$$\alpha_0=6,\ \alpha_1=9,\ p_0=1 \Rightarrow p_1(K_1)=4 \tag{18}$$

Значит, базис состоит из четырех линейно независимых циклов. Циклы $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$, как легко видеть, линейно независимы, и, значит, образуют базис, однако, не сильный, ибо например, цикл z_4 не имеет различающего ребра: все его ребра входят в циклы $z_1,\ z_2,\ z_3$

Однако, согласно теореме с.50 можно указать и сильный базис этого комплекса, например, нарисованный на третьем рисунке, где символом $\sim$ обозначены различающие ребра циклов этого сильного базиса.

С клеточным разложением K поверхности (компактной поверхности и конечным клеточным разложением ее) до сих пор мы связывали два линейных комплекса: линейный комплекс K_1, состоящий из ребер и вершин этого клеточного разложения (его остов (с.39) и линейный комплекс K_1^*, который можно вынуть из поверхности V без нарушения ее связности (с.52).

Как мы видели (с.54) порядок связности второго q (число линейно независимых его циклов) не зависит от исходного клеточного разложения поверхности и является инвариантом поверхности.

Первый же линейный комплекс K_1 сильнее зависит от клеточного разложения и его порядок связности $p_1(K_1)$ не является топологическим инвариантом поверхности V. Однако, пространство $Z(K_1)$ циклов комплекса K_1 можно факторизовать таким образом, что получим пространство $H_1(V)$ (группу Бетти) – фактор-группу $Z(K_1)$ по некоторой эквивалентности ([II], с. I3), которая не будет зависеть от исходного клеточного разложения.

§ 3. Фактор-группа и фактор-пространство

Поскольку $Z(K_1)$ – группа и даже векторное пространство, то ее факторизацию дает фактор-группа и фактор-пространство, которые определяются по любой подгруппе H_0 ([7], с.II7) и любому векторному подпространству W_0 ([8], с. 76). Напомним некоторые сведения из алгебры, которые будем формулировать сразу для абелевой группы и, значит, употреблять аддитивную запись.

1) Чтобы подмножество H_0 абелевой группы G было ее подгруппой, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов a, b подмножества H_0 их разность $a-b$ принадлежала ему

$$\forall a, b \in H_0 \Rightarrow a-b \in H_0 \qquad (1)$$

2) <u>Определение</u>. Если абелева группа G имеет подгруппу H_0, то смежным классом H_1 по этой подгруппе называется множество сумм фиксированного элемента $g_1 \in G$ со всеми элементами подгруппы, он обозначается .

$$H_1 = g_1 + H_0 \qquad (2)$$

3) Смежные классы группы G по ее подгруппе H_0

$$H_0\ H_1, \ldots H_k \qquad (3)$$

разбивают группу G, т.е.

$$\bigcup H_i = G, \quad \forall i,j \mid i \neq j \quad H_i \cap H_j = \varphi \qquad (4)$$

4) Для того, чтобы элементы a и b группы G принадлежали одному ее смежному классу H_i по подгруппе H_0, необходимо и достаточно, чтобы их разность $a-b$ принадлежала подгруппе H_0

$$\forall H_i \qquad \{a, b\} \in H_i \Longleftrightarrow a-b \in H_0 \qquad (5)$$

5) Множество $G \setminus H_0$, элементами которого являются смежные классы (3) группы G по ее подгруппе H_0 является группой с композицией

$$(a+H_0)+(b+H_0) = (a+b)+H_0 \qquad (6)$$

и называется фактор-группой группы G по H_0.

6) Нейтральным элементом в G/H_0 является подгруппа H_0

$$H_i + H_0 = H_i \qquad (7)$$

7) Если $h_i \in H_i \ (i=1,2,3)$, $\qquad H_1 + H_2 = H_3 \Longleftrightarrow h_3 - (h_1+h_2) \in H_0. \qquad (8)$

8) Отношение в $G \times G$, в котором находятся два любых элемента одного смежного класса H_i является эквивалентностью ([II], с.I2), и значит, факторизация по подгруппе - факторизация по эквивалентности.

9) Если группа G -конечная: имеет R элементов, а подгруппа H_0 - r элементов, то фактор-группа G/H_0 имеет ρ элементов, где

$$\rho = \frac{R}{r} \qquad (9)$$

I0) Если группа G является векторным пространством $\bar{V}$ ([8], с.72) над полем P, то для того, чтобы подмножество $\bar{W}_0$ пространства $\bar{V}$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы

$$а)\ \forall a, b \in \bar{W}_0 \Rightarrow a-b \in \bar{W}_0, \qquad (10)$$

$$б)\ \forall a \in \bar{W}_0,\ \forall k \in P \Rightarrow ka \in \bar{W}_0. \qquad (11)$$

II) Если группа G является R-мерным векторным пространством $\bar{V}$ над полем P, и $\bar{W}_0$ - его r_0-мерное подпространство ([8], с. 76), то фактор-группа $V/\bar{W}_0$ является векторным пространством размерности

$$r = R - r_0 \qquad (12)$$

над тем же полем P и называется фактор-пространством $\bar{V}$ по $\bar{W}_0$. Смежные классы W_i подпространства $\bar{W}_0$ называются плоскостями.

I2) Если W_i, W - смежные классы фактор-пространства $\bar{V}/\bar{W}_0$ и $w_i \in W_i$, $w \in W$, то для того, чтобы было $\qquad k' W_i = W, \quad k' \in P \qquad (13)$

необходимо и достаточно, чтобы $w - k^i w_i \in \bar{W}_0$. $\qquad$ (14)

13) Таким образом, чтобы доказать, что $\bar{V}/\bar{W}_0$ имеет размерность r достаточно предъявить r элементов w_i группы $\bar{V}$ таких, что

$$k^i w_i \in \bar{W}_0 \iff k^i = O_P \qquad (15)$$

где O_P – нейтральный элемент поля P по сложению, и

$$\forall w \in \bar{V} \quad \exists k^i \in P \mid \ w - k^i w_i \in \bar{W}_0. \qquad (16)$$

Итак, отыскание фактор-пространства пространства циклов $\mathcal{Z}(K_1)$ сводится к отысканию его подпространства.

§ 4. Циклы, гомологичные нулю

Как мы видели (с.43) простые циклы клеточного разложения K поверхности V делятся на несущественные и существенные в зависимости от того, разрез по ним нарушает связность поверхности V или нет.

В случае несущественного цикла z поверхность V после разреза по нему распадается на две поверхности с краем V_1 и V_2, для каждой из которых z станет краем.

Как это деление распространить разумным образом на циклы (с.89): суммы простых циклов? Если буквально перенести принцип деления простых циклов, то нужно рассмотреть во-первых, существенные циклы z – разрезы по которым не нарушают связность поверхности V, т.е. если цикл z состоит из n_1 составляющих (с.89) простых независимых циклов

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_{n_1} \qquad (1)$$

то все эти составляющие простые циклы существенные, и, значит,

$$n_1 \leq q \qquad (2)$$

и разрез (с.62) по всем ним, удваивая их, даст поверхность V^* с z краями

$$n_1 \leq z \leq 2n_1, \qquad (3)$$

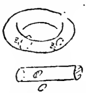
которыми являются оба экземпляра этих циклов. Например, если на торе

рассмотреть цикл, состоящий из суммы меридиана и параллели $\quad z = z_1 + z_2 \qquad (4)$

то разрез по нему даст квадрат – связность не нарушится. Такой существенный цикл можно назвать существенным циклом n_1 порядка.

Теперь перейдем к циклу z, разрез по которому разбивает поверхность на несколько кусков. Рассмотрим две группы из них V_1 и V_2. Каждая из них, например, V_1 получилась в результате разреза V, т. е., грубо говоря, является поверхностью с краем (может быть и несвяз-

ной - иметь несколько компонент), и этот край ее, будучи объединением простых циклов, принадлежит исходному циклу z, но_может_не исчерпывать его, например, если цикл z является объединением существенного и несущественного цикла тора: меридиана и несущественного



простого цикла z_0. После разреза по циклу z связность нарушится: получим две поверхности с краем: боковая поверхность цилиндра с вырезанным кружочком и диск, но это заслуга целиком второго цикла, первый - не причем, это свойство не всего цикла z .

Таким образом, цикл z будет обобщать несущественный (делящий) простой цикл, если после разреза по нему полученные куски можно разделить на две группы так, что край каждой исчерпывает один экземпляр всего цикла z .

Значит, теперь нам нужно выразить математически понятие куска поверхности и его края.

Но еще у нас заботой будет назвать такой интересный цикл. Поскольку мы имеем ввиду получить некоторую подгруппу циклов B_0 группы циклов $Z(K)$ и фактор-группу по ней, и, значит, рассматривать эквивалентность двух циклов как свойство принадлежности одному смежному классу этой подгруппы, то т.к. нуль-цикл, принадлежа любой подгруппе, будет принадлежать и этой подгруппе B_0, получим, что элементы подгруппы B_0 -это те, которые в этой эквивалентности эквивалентны нуль-циклу. Ну а эту эквивалентность французы назвали подобием, похожестью (homologie). Таким образом, наши циклы называются не очень хитро - циклами, гомологичными нуль-циклу (или циклами гомологичными нулю для простоты). Будем это обозначать так: $z \sim O_z$ (или $z \sim 0$).

Итак, переходим к формализации, несколько обобщив понятие клеточного разложения поверхности до двумерного комплекса.

Определение. Двумерным комплексом K_2 называется множество 2-клеток таких, что любые две клетки могут иметь самое большее одно общее ребро или одну_общую_вершину. Клеточное разложение K поверхности является двумерным комплексом, но вообще говоря,

не наоборот. Множество точек двумерного комплекса называется 2-полиэдром. Краем двумерного комплекса называется совокупность его ребер, принадлежащих нечетному числу клеток.

Подкомплексом и соответственно подполиэдром данного комплекса и его подиэдра называется подмножество клеток комплекса K_2, само являющееся комплексом и его полиэдр.

Определение. Суммой (mod 2) двух подполиэдров P_1, P_2 полиэдра $\tilde{P}$

называется их объединение, из которого вынуто пересечение

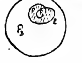
$$P = P_1 + P_2 = P_1 \cup P_2 \setminus P_1 \cap P_2 \qquad (5)$$

Определение. Цикл z на поверхности V называется гомологичным нулю (правильнее нуль-циклу), если существует клеточное разложение поверхности V, в которое он входит и является краем некоторого подполиэдра P этого разложения. Он, очевидно, будет одновременно краем и для $V \setminus P$.

Примеры.

I. Всякий несущественный простой цикл гомологичен нулю, в частности, любой простой цикл на сфере гомологичен нулю.

2. Рассмотрим на сфере нарисованный цикл. Он разобьет сферу на три подполиэдра P_1, P_2, P_3 (6) и будет краем для P_1 и $P_2 + P_3$. Заметим, что P_1 не будет поверхностью с краем в нашем понимании (с.38), т.к. окрестность точки A не гомеоморфна открытому кругу. Это и вызвало необходимость введения полиэдра.

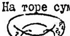


3. Сумма двух пересекающихся циклов z_1 и z_2 на сфере гомологична нулю.

4. Поскольку мы имеем ввиду доказать, что все гомологичные нулю циклы образуют подгруппу, то объединение любых простых циклов на сфере будет давать цикл гомологичный нулю.

Не такой очевидной будет ситуация на торе.

5. На торе сумма ($mod\ 2$) двух меридианов z_1 и z_2 гомологична нулю, т.к. делит тор на два полиэдра P_1 и P_2, для которых $z = z_1 + z_2$ является краем.



6. На торе сумма двух пересекающихся нарисованных циклов разбивает тор на три части P_1, P_2, P_3 и цикл $z = z_1 + z_2$ (7) является краем для $P_1 + P_2$ и P_3, значит, гомологичен нулю.

7. На торе сумма ($mod 2$) двух параллелей гомологична нулю.

8. На торе сумма ($mod 2$) параллели и такой деформации меридиана, как нарисовано, разбивает тор на 3 компоненты, однако, ни для одной из них или их суммы цикл $z = z_1 + z_2$ не является краем, значит z не гомологичен нулю.

9. На торе сумма z трех меридианов разбивает тор на 3 компоненты, однако, ни для одной из них z не является краем, z – не гомологичен нулю.

I0. На торе сумма трех параллелей не гомологична нулю.

II. На кренделе V цикл z на пояске гомологичен нулю, т.к. разбивает его поверхность на две компоненты P_1, P_2, для каждой из которых является краем.

Замечание. Неразбивающий (существенный) цикл не гомологичен нулю, т.к. нет компоненты поверхности, для которой он является краем единожды. Поэтому

I2. На торе сумма меридиана и параллели не гомологична нулю.

I3. На поверхности кренделя V рассмотрим простые циклы

$$z_1,\quad z_2,\quad z_3,\quad z_4,\quad z_5 \tag{8}$$

Тогда а) $z_1+z_2\sim 0$ б) $z_1+z_3\sim 0$ в) $z_1+z_3+z_5\sim 0$

Замечание. На примерах I, 5, I3 мы видим, что гомологичный нулю цикл может состоять из одного, двух, трех простых циклов.

Переходим к центральной теореме о циклах гомологичных нулю, утверждающей, что они образуют группу. Для того, чтобы это доказать, в силу I) с.93 нужно доказать, что разность двух любых из них гомологична нулю, но поскольку в силу (5) с. 89 каждый цикл совпадает со своим противоположным, то дело сводится к тому, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема. Сумма двух гомологичных нулю циклов поверхности V гомологична нулю.

Пусть циклы z_1, z_2 клеточного разложения K поверхности V являются соответственно краями подполиэдров P_1, P_2 поверхности V

$$\partial P_1 = z_1,\quad \partial P_2 = z_2 \tag{9}$$

Докажем, что сумма их (mod 2)

$$z = z_1 + z_2 \tag{I0}$$

является краем w для подполиэдра P поверхности V, который является суммой полиэдров P_1 и P_2 (с.95)

$$P = P_1 + P_2 = P_1 \cup P_2 \setminus P_1 \cap P_2 \;\Rightarrow\; \partial P = \partial P_1 + \partial P_2 \tag{II}$$

Для совпадения z и w нам нужно доказать два включения

$$1)\ w \subset z \qquad 2)\ z \subset w \tag{I2}$$

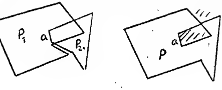
Напомним, что к каждому ребру a клеточного разложения K поверхности V примыкает ровно две грани α_1 и α_2.

Сначала будем доказывать ($I2_1$). Поскольку всякий цикл состоит из ребер, это будет равносильно тому, чтобы доказать

$$a \subset w \Rightarrow a \subset z \tag{I3}$$

Поскольку P -подполиэдр поверхности V с клеточным разложением K, то ребро его края является ребром клеточного разложения K. Поэтому к нему примыкают две грани α_1 и α_2 клеточного разложения K поверхности V. Так как P_1, P_2, P -подполиэдры V с клеточным разложением K, грани P являются гранями K. Поскольку a принад-

лежит краю P, то прилежащей к a гранью P может быть только одна



грань – одна из граней α_1, α_2 пусть α_1

$$\alpha_1 \subset P, \quad \alpha_2 \bar{\subset} P \qquad (14)$$

В силу определения P (с.95) грань α_1 принадлежит лишь одному из подполиэдров P_1, P_2, пусть P_1

$$\alpha_1 \subset P_1, \quad \alpha_1 \bar{\subset} P_2 \qquad (15)$$

Тогда из (14_2) и определения P (с.95) следует, что в отношении принадлежности α_2 к P_1 возможны два случая

$$1) \alpha_2 \subset P_1, \alpha_2 \subset P_2, \qquad 2) \alpha_2 \bar{\subset} P_1, \quad \alpha_2 \bar{\subset} P_2 \qquad (16)$$

В первом случае из (15_1), (16_1) ребро a не принадлежит краю z_1, а в силу (15_2) и (16_2) принадлежит краю z_2, а во втором случае наоборот:

$$1) \ a \bar{\subset} z_1, a \subset z_2 \qquad 2) \ a \subset z_1, \quad a \bar{\subset} z_2, \qquad (17)$$

т.е. в обоих случаях в силу определения суммы циклов $z = z_1 + z_2$ (с.88) ребро a входит в эту сумму, т.е. доказано (13):

Теперь докажем (12_2), т.е.

$$\forall a \subset z \Rightarrow a \subset w. \qquad (18)$$

Из (18_1) по определению суммы циклов (с.88) следует, что ребро a входит в один из слагаемых циклов z_1, z_2 и не входит в другой, пусть

$$a \subset z_1, \quad a \bar{\subset} z_2. \qquad (19)$$

Из (19_1) и (9_1) следует, что лишь одна из граней α_1, α_2, прилежащих к a, принадлежит к P_1, а другая нет, пусть

$$\alpha_1 \subset P_1, \quad \alpha_2 \bar{\subset} P_1. \qquad (20)$$

Из (19_2) будет следовать, что грани α_1, α_2 либо обе принадлежат P_2, либо обе не принадлежат ему

$$1) \alpha_1 \subset P_2, \quad \alpha_2 \subset P_2, \qquad 2) \alpha_1 \bar{\subset} P_2, \quad \alpha_2 \bar{\subset} P_2 \qquad (21)$$

В первом случае из (21_1) и (20_1) следует в силу определения P

$$\alpha_1 \bar{\subset} P, \quad \alpha_2 \subset P. \qquad (22)$$

Во втором случае, напротив, из (21_2) и (20) будет следовать

$$\alpha_1 \subset P, \quad \alpha_2 \bar{\subset} P, \qquad (23)$$

т.е. в обоих случаях по определению края P (с.95) ребро a входит в край подполиэдра P: $a \subset w$, т.е. доказано (18), а значит в сочетании с (13) и (12).

<u>Следствие.</u> Сумма любых двух простых циклов на сфере гомологична нулю. <u>Следствие.</u> Множество B_0 циклов гомологичных нулю вместе с нуль-циклом O_z

$$B_0 = \{ z \mid z \sim C_z \} \cup O_z \qquad (24)$$

(в силу сказанного перед теоремой) образует подгруппу группы циклов Z.

<u>Определение.</u> Эта подгруппа называется группой краев клеточного разложения K поверхности V.

I

Следствие. Группа B_0 – абелева, как подгруппа абелевой группы.

Теорема. Группа B_0 – векторное подпространство ([8], с. 76) пространства циклов Z

В силу предыдущей теоремы достаточно доказать (с.93), что операция
$$Z \times Z_2 \to Z \tag{25}$$
не выводит подгруппу B_0 из себя. Но это будет следовать из того, что
$$O_2 \subset B_0 \tag{26}$$
и (с.90)
$$\forall z \quad \check{O} z = O_2 , \quad \check{I} \cdot z = z. \tag{27}$$

§ 5. Группа Бетти (mod 2)

В силу § 3 (с. 92) подгруппа B_0 краев данного клеточного разложения K поверхности V порождает новую абелеву группу – фактор-группу абелевой группы циклов $Z(K)$ этого клеточного разложения по этой подгруппе $B_0(K)$
$$H_1(K) = Z(K)/B_0(K) \tag{I}$$

Эта группа называется группой Бетти (или группой гомологии) клеточного разложения K поверхности V. (В дальнейшем (с.I03) мы докажем, что она не зависит от клеточного разложения K, и, значит, характеризует лишь саму поверхность V).

Согласно определению фактор-группы (с.93) элементами группы H_1 будут смежные классы по подгруппе B_0:
$$B_0, B_1, \ldots B_k \ldots \tag{2}$$
Применим к группе Бетти результаты алгебры, изложенные в §3.

I. Композиция в H_1 : $H_1 \times H_1 \to H_1$ индуцируется композицией в Z т.е.
$$z_1 \in B_1, \; z_2 \in B_2 \;\Rightarrow\; z_1 + z_2 \in B_1 + B_2 \tag{3}$$

2. Нейтральным элементом группы Бетти является группа краев, т.е.
$$B_i + B_0 = B_i \tag{4}$$

3. Для того, чтобы два цикла z_1 и z_2 принадлежали одному смежному классу, необходимо и достаточно в силу 4) с.93 и (5) с. 89, чтобы их сумма принадлежала B_0 (была гомологична нулю), поэтому в силу (3)
$$B_i + B_i = B_0 \tag{5}$$
~~Из (4) и (5) следует~~
т.е. каждый элемент B_i группы Бетти совпадает со своим противоположным
$$-B_i = B_i \tag{6}$$

Из (4) и (5) следует (с.80), что порядок каждого элемента B_i группы H_1, отличного от нейтрального равен 2.

4. В силу того, что группа циклов Z – векторное пространство (с. 90), а группа B_0 – его подпространство (с.99), то (с.93) группа Бетти также является векторным пространством над тем же полем вычетов по модулю 2, т.е. в нем кроме операции $H_1 \times H_1 \to H_1$ (3) определена операция

$$H_1 \times \mathbb{Z}_2 \to H_1 \tag{7}$$

такая, что в силу (I2) с. 90

$$\check{0} \cdot B_i = B_0, \quad \check{1} \cdot B_i = B_i, \tag{8}$$

5. Если b_1 - размерность группы Бетти как векторного пространства, то в силу (4) с. (90) для нее имеется изоморфизм

$$H_1 \sim \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{b_1} \tag{9}$$

т.е. группа Бетти данного клеточного разложения K поверхности V по существу определяется своей размерностью b_1. Это число b_1 называется одномерным числом Бетти для данного клеточного разложения K.

6. Для того, чтобы смежные классы B_i как элементы векторного пространства H_1 были линейно зависимы, необходимо и достаточно в силу (4), (5) чтобы сумма некоторых из них давала группу краев

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_{\rho'} = B_0 \tag{I0}$$

В противном случае они будут линейно независимыми.

7. Определение. Циклы

$$z_1, z_2, \ldots, z_\rho \tag{II}$$

называются гомологически линейно зависимыми, если сумма некоторых из них принадлежит группе краев (т.е. гомологична нулю)

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{\rho'} \sim O_z \tag{I2}$$

В противном случае циклы (II) называются гомологически линейно независимыми.

(Замечание. Поскольку нуль-цикл принадлежит B_0, то линейно зависимые циклы (с.90) будут гомологически линейно зависимыми, но, вообще говоря, не наоборот. Также гомологически линейно независимые циклы будут линейно независимыми, но, вообще говоря, не наоборот.)

Таким образом, в силу (I3) с.94, (3) и (5) с. 89 чтобы доказать, что группа Бетти имеет размерность ρ достаточно предъявить ρ гомологически линейно независимых циклов z_i таких, что любой цикл z клеточного разложения поверхности V вместе с ними образуют гомологически линейно зависимые циклы.

§ 6. Числа Бетти

Для того, чтобы доказать, что группа Бетти клеточного разложения K поверхности V по существу не зависит от клеточного разложения, достаточно в силу изоморфизма (9) с. I00 доказать, что ее размерность, т.е. одномерное число Бетти b_1 не зависит от клеточного разложения K, и, значит, является топологическим инвариантом поверхности V. Но у компактной поверхности, как мы знаем (с.64) имеются лишь два инварианта: ориентируемость (или неориентируемость) и порядок связности q. Значит, нам нужно доказать, что одномерное число Бетти b_1 зависит лишь от них. Оказывается даже, что оно за-

висит только от порядка связности. Докажем это для ориентируемой поверхности.

Теорема. Одномерное число Бетти любого клеточного разложения K ориентируемой поверхности V равняется порядку ее связности q

$$b_1 = q \tag{I}$$

Пусть ориентируемая поверхность V имеет порядок связности q (с. 54). Поскольку он не зависит от клеточного разложения K поверхности V, то в силу с.47 число q будет равняться максимальному числу сильно независимых простых циклов этого клеточного разложения

$$z_1, \ldots z_q \tag{2}$$

одновременный разрез по которым не нарушает связности поверхности V

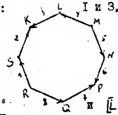
Эти циклы и будут циклами, о которых говорилось в конце предыдущего параграфа.

Действительно, во-первых, они гомологически линейно независимы, т.к. никакая сумма из них не разбивает поверхности и, значит, (с.97) не может быть гомологичной нулю.

Остается доказать, что любой цикл либо сам гомологичен нулю, либо в сумме с некоторыми из циклов z_i образует цикл гомологичный нулю.

В силу теоремы с. 97 для этого достаточно доказать, что любой простой цикл z_0, участвующий в образовании цикла z либо сам гомологичен нулю, либо в сумме с некоторыми из циклов z_i образует цикл гомологичный нулю, т.е. вместе с ними разбивает поверхность V на две части, для каждой из которых их совокупность является краем.

В § 10 (с.68) мы видели, что любую ориентируемую поверхность можно рассматривать как $4k$ - угольник Пуанкаре с $k = \frac{q}{2}$ гомеоморфный кругу, у которого отождествлены ребра края через одно и в обратном порядке: I и 3, 2 и 4, 5 и 7, 6 и 8, ... $4k-2$ и $4k$ и отождествленные ребра соответствуют сильно независимым существенным циклам (2) поверхности.



Например, в восьмиугольнике $KLMNPRS$ (многоугольнике Пуанкаре, соответствующем кренделю (с.68)) будут соответствовать: $[RS]$ и $[LK]$, $[SK]$ и $[ML]$, $[MN]$ и $[QP]$, $[NP]$ и $[RQ]$.

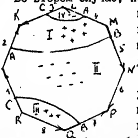
Поскольку этих сильно независимых циклов также q, то достаточно будет доказать наше утверждение для них, т.е. считать циклы (2) ребрами соответствующего многоугольника Пуанкаре.

Простой цикл z_0 на многоугольнике Пуанкаре изобразится линией,

которая либо не пересекается с краем многоугольника, либо может подходить к некоторой точке края многоугольника, "исчезать в ней" и появляться вновь из соответствующей точки другой его стороны,

изображающей то же ребро (тот же разрез), т.е. будет изображаться набором дуг.

В первом случае цикл z_0 будет целиком лежать внутри многоугольника Пуанкаре, и, значит, поскольку многоугольник гомеоморфен кругу, а внутренность последнего гомеоморфна евклидовой плоскости (с.6), будет по теореме Жордана разбивать его на две части, для каждой из которых будет краем, т.е. сам будет являться циклом, гомологичным нулю.



Во втором случае, поскольку z_0 – простой цикл: его ребра не пересекаются между собой во внутренних точках, то и эти изображающие цикл z_0 дуги в многоугольнике Пуанкаре не пересекаются между собой.

Поскольку каждая такая дуга делит многоугольник на две части и эти дуги не пересекаются, то они разделят многоугольник на клетки, которые мы будем называть <u>осколками</u>, краем каждого из которых будет совокупность самое большее двух таких дуг и части края многоугольника, а каждая такая дуга входит в край двух таких осколков.

Например, в восьмиугольнике $KLMNPQRS$ некоторый простой цикл z_0 изобразится тремя дугами

$$AB, \qquad BC \qquad \text{и} \qquad CA. \tag{3}$$

Все осколки многоугольника разделим на две части следующим образом. Возьмем два цвета: положительный (со знаком +) и отрицательный (со знаком –) и покрасим один из этих осколков, например $ABMACK$ в цвет +, соседние с ним осколки $ASCBPNB$ и ACL в цвет–и т.д.

Затем возьмем любой такой осколок (например, первый $ABMACK$) и рассмотрим часть какого-нибудь ребра края многоугольника, входящего в его край (например, $[MB]$). При склеивании многоугольника, обратном к разрезам, превратившим исходную поверхность V в этот многоугольник, этот отрезок склеится с отрезком другого ребра многоугольника (в данном случае с $[QB]$). Осколок полученного разбиения многоугольника Пуанкаре, в край которого входит этот второй отрезок, может быть покрашен как в положительный, так и в отрицательный цвет (для данного примера – в положительный).

Если осколки, примыкающие к одному такому куску (например, к

$$[MB]=[QB]' \tag{4}$$

окажутся окрашенными одинаково, то это кусок ($[MB]=[QB]$) назовем <u>благополучным</u>, а если нет (например,

$$[KC]=[SC] \tag{5}$$

то –<u>неблагополучным</u>.

При обратном склеивании многоугольника Пуанкаре в исходную поверхность V благополучные кусочки общего края сотрем, а неблагополучные – сохраним. (В нашем примере сотрем $[MB]=[QB]$ и осколки I и Ш через стертый кусок сольются в одну одинаково окрашенную большую клетку $\mathrm{I}\cup\mathrm{III}$).

Если кусочек ребра края многоугольника благополучный, то и соседний ему по ребру кусочек тоже будет благополучным, т.к. он и соответствующий ему на склееваемом с ним ребре будут краями осколков, соседних с одинаково окрашенными, а потому между собой также одинаково окрашенных. (Так $[BN]$, $[BP]$ являются краями осколка П, окрашенного в отрицательный цвет.).

Тем самым при склеивании многоугольника в поверхность V , их также надо стереть. Напротив того, кусочек $[LC]=[RC]$ соседний по ребру к неблагополучному $[CK]=[CS]$ будет также неблагополучным.

Тем самым благополучие (и соответственно неблагополучие) распространится на все ребро многоугольника, при склеивании все благополучные ребра будут стерты, а неблагополучные оставлены.

На нашем примере благополучными будут ребра (5=7)

$$[MN]=[QP], \tag{6}$$

а неблагополучными (I=3, 2=4, 6=8)

$$[RS]=[LK]; \quad [SK]=[ML], \quad [NP]=[RQ] \tag{7}$$

Сохраним также все дуги, образующие наш цикл z_0.

Тем самым при обратном склеивании многоугольника Пуанкаре в поверхность V все границы между одноцветными осколками будут стерты, а все границы между разноцветными сохранены. Вся поверхность разбита по цвету на две части, общими краями которых являются наш цикл z_0 и циклы

$$z_1, \dots, z_l, \qquad (\text{ у нас } z_1, z_2, z_6 \ ) \tag{8}$$

соответствующие неблагополучным ребрам многоугольника Пуанкаре.

А это значит по определению (с.95) что их совокупность образует цикл гомологичный нулю

$$z_0+z_1+\dots z_l\sim O_2. \qquad (z_0+z_1+z_2+z_6\sim O_2). \tag{9}$$

<u>Следствие</u>. Для сферы с p ручками одномерное число Бетти равняется

$$b_1=2p. \tag{10}$$

<u>Следствие</u>. Группа Бетти $H_1(K(V))$ клеточного разложения K поверхности V не зависит от клеточного разложения K и поэтому называется группой Бетти поверхности V – $H_1(V)$.

<u>Следствие</u>. Теорема переносится на неориентируемые поверхности – поверхности с краем.

Определение. Нульмерным числом Бетти поверхности V называется число ее компонент

$$\beta_0 = p_0 \tag{II}$$

Тогда для поверхности (поверхности с краем) эйлерова характеристика равняется в силу (28) с. 55 и (I) с. IOI комбинации

$$\chi(V) = 2\beta_0 \cdot \beta_1 \tag{I2}$$

§ 7. Гомологичные между собой циклы

Согласно рассуждениям с. 95 введем следующее определение.

Определение. Два цикла z_1 и z_2 клеточного разложения K поверхности V называются гомологичными ($\mathrm{mod}\ 2$), если они принадлежат одному смежному классу B_1 группы циклов $Z(K)$ по подгруппе краев B_0

Будем обозначать это так

$$z_1 \sim z_2. \tag{I}$$

Каждый такой смежный класс н называется классом гомологичности, а отношение в $Z \times Z$, в котором находятся гомологичные между собой циклы - гомологичностью клеточного разложения K поверхности V

Теорема. Гомологичность циклов клеточного разложения K поверхности V является эквивалентностью ([II], с. I2).

Теорема очевидна, т.к. принадлежность к одному смежному классу группы по любой ее подгруппе является эквивалентностью.

Следствие I. В силу определения эквивалентности:

I) каждый цикл гомологичен сам себе

$$z \sim z, \tag{2}$$

2) гомологичность циклов симметрична

$$z_1 \sim z_2 \iff z_2 \sim z_1, \tag{3}$$

3) гомологичность циклов транзитивна

$$z_1 \sim z_3, \quad z_3 \sim z_2 \implies z_1 \sim z_2 \tag{4}$$

Следствие 2. Так как группа краев B_0 является одним из классов гомологичности и

$$B_0 \ni O_z, \tag{5}$$

то в силу (4)

$$z_1 \sim z_2, \quad z_2 \sim O_z, \implies z_1 \sim O_z \tag{6}$$

- всякий цикл гомологичный гомологичному нуль-циклу, сам гомологичен нуль-циклу (нулю).

Следствие 3. Факторизация группы циклов $Z(K)$ клеточного разложения K поверхности V по гомологичности циклов ([II], с. I3) дает группу Бетти этого разложения, и, значит, этой поверхности.

Теорема. Для того, чтобы два цикла z_1 и z_2 клеточного разложения K поверхности V были гомологичны, необходимо и достаточно, чтобы их сумма ($\mathrm{mod}\,2$) была гомологична нулю

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 + z_2 \sim O_z. \tag{7}$$

Действительно, в силу (5) с. 93 для того, чтобы циклы z_1 и z_2 принадлежали одному классу гомологичности, необходимо и достаточно, чтобы их разность принадлежала группе краев B_o

$$z_1 - z_2 \in B_o, \qquad \text{т.е.} \qquad z_1 - z_2 \sim O_z \tag{8}$$

но для любой группы разность двух элементов есть сумма первого с противоположным второму

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2), \tag{9}$$

а в силу (5) с. 89

$$-z_2 = z_2 \tag{10}$$

Тогда из (8) получим

$$z_1 + z_2 \sim O_z \tag{11}$$

В силу этой теоремы можно дать такое определение гомологичности двух циклов ([6], с.123).

Определение. Два цикла z_1 и z_2 клеточного разложения K поверхности V называются гомологичными (mod 2), если их сумма гомологична нулю, т.е. разрез по сумме циклов $z = z_1 + z_2$ разбивает поверхность на части, из которых можно скомпоновать две группы, для каждой из которых цикл z является краем.

Примеры.

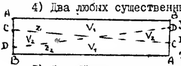
1) Два любых меридиана тора гомологичны в силу 5.с. 96.

2) Две любые параллели тора гомологичны между собой в силу 7.с.96

3) Два цикла z_1 и z_2, нарисованные на торе, гомологичны между со-

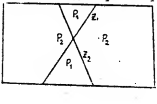
бой, т.к. их сумма – цикл $z = z_1 + z_2$ разбивает тор на две компоненты V_1, V_2 для каждой из которых эта сумма является краем.

4) Два любых существенных цикла z_1, z_2 ("параллели") листа Мебиуса гомологичны между собой, т.к. разбивают лист на две компоненты V_1, V_2, для которых их сумма является краем.



5) Для сферы с p ручками два меридиана любой ручки и две параллели любой ручки гомологичны между собой.

6) Хотя каждая прямая проективной плоскости не нарушает ее связности (с.45), но две любые ее прямые разбивают все точки, им не принадлежащие на две лунки ([II], с.99), т.е. на проективной плоскости любые две прямые дают гомологичные между собой циклы.



7) На сфере любые два цикла гомологичны между собой, т.к. гомологичны нулю (с.96).

Замечание. Два цикла z_1 и z_2 одновременные разрезы по которым не разбивают поверхность V, не являются гомологичными, поскольку их сумма не гомологична нулю (с.97).

Следствие I. Циклы z_1 и z_2, нарисованные на поверхности кренделя не гомологичны нулю, т.к. их сумма не нарушает связности поверхности V.

Следствие 2. Меридиан и параллель тора не гомологичны в силу I2. с. 97.

В § 5 на с. 100 мы ввели понятие гомологически линейно зависимых циклов

$$z_1, \dots, z_\ell \qquad (12)$$

как таких, что сумма (mod 2) некоторых из них гомологична нулю

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{\ell'} \sim O_z, \qquad (13)$$

назовем эти последние ℓ' циклов существенно гомологически линейно зависимыми. Тогда, если ℓ' циклов существенно гомологически линейно зависимы (13), то каждый из них гомологичен сумме остальных. Например, на кренделе 3 цикла (с.97) существенно гомологически линейно зависимы

$$z_1 + z_3 + z_5 \sim O. \qquad (14)$$

Значит

$$z_1 \sim z_3 + z_5, \qquad (15)$$

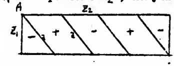
$$z_3 \sim z_5 + z_1, \qquad (16)$$

$$z_5 \sim z_1 + z_3. \qquad (17)$$

Поскольку на торе меридиан z_1 и параллель z_2 не гомологичны, а порядок связности тора равен 2 (с.56), т.е. максимальное число δ_1 гомологически линейно независимых циклов на нем равно (с. 101) 2, то любой третий цикл z на торе с циклами z_1 и z_2 будет давать три гомологически линейно зависимые циклы, т.е. либо 1) он сам гомологичен нулю, либо 2) гомологичен меридиану, либо 3) гомологичен параллели, либо 4) гомологичен их сумме

$$1)\ z \sim O_z,\quad 2)\ z + z_1 \sim O_z,\quad 3)\ z + z_2 \sim O_z \quad 4)\ z + z_1 + z_2 \sim O_z. \qquad (18)$$

Например, рассмотрим на торе "горизонтальную" пружинку. Разрезав тор по меридиану z_1 и параллели z_2, получим его многоугольник Пуанкаре, в котором меридиан z_1 и параллель z_2 изобразятся противоположными сторонами, а пружинка совокупностью параллельных отрезков между горизонталями, изображающими параллель. Они разобьют прямоугольник Пуанкаре на параллелограммы и два крайних треугольника. Если витков к то параллелограммов будет к-1. Покрасим один из этих параллелограм-



мов в цвет +, соседние в цвет - и т.д. Если число витков четное, то крайние треугольники будут закрашены в один цвет, и при обратном склеивании прямоугольника в тор ребро z_1 сотрем, а все остальные сохраним. Тор распадется на k кусков, из которых можно будет скомпоновать две группы: покрашенные в цвет + и покрашенные в цвет -, для которых краем будет сумма z и z_2, т.е.

$$z + z_2 \sim O_2 \Rightarrow z \sim z_2 \qquad (19)$$

Если число витков k - нечетно, то крайние треугольники будут закрашены в разные цвета, при склеивании прямоугольника Пуанкаре в тор ребро z_1 придется сохранить и будем иметь

$$z + z_1 + z_2 \sim O_2 \Rightarrow z \sim z_1 + z_2 . \qquad (20)$$

Аналогично, если на торе рассмотреть "вертикальную" пружинку, то

она будет гомологична либо меридиану z_1, либо сумме $z_1 + z_2$ в зависимости от четности витков.

§ 8. Фундаментальная группа поверхности (группа Пуанкаре)

В § I с. 38 мы определили линию на поверхности, как множество ее точек, на котором топология поверхности индуцирует одномерное топологическое многообразие (возможно с краем). Связная линия на поверхности гомеоморфна окружности, связная линия с краем - отрезку.

В § 3 с.44 мы ограничились линиями на поверхности такими, что существует клеточное разложение K поверхности V, для которого они являются ломаными из ребер. Если вершины связной ломаной упорядочить так, чтобы соседние вершины принадлежали одному ребру, то линия называется ориентированной. Непосредственным обобщением ориентированной линии является путь.

Определение. Непрерывный образ ориентированного отрезка называется путем, начинающимся в образе A начала отрезка, и заканчивающимся в образе B конца отрезка.

В том же непрерывном отображении образ противоположного отрезка называется обратным путем к первому пути $\gamma(t)$ и обозначается $\gamma^{-1}(t)$.

Если образы начала и конца отрезка совпадают, то соответствующий путь называется замкнутым (петлей) ω :

Определение. Замкнутый путь на поверхности V называется гомотопным нулю, если его можно непрерывно по V стянуть в точку: $\omega \simeq O$.

Например, на сфере "восьмерка" гомотопна нулю, на торе цикл z_0 гомотопен нулю, меридиан и параллель не гомотопны нулю.

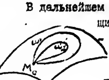
Теорема. Всякий гомотопный нулю цикл – гомологичен нулю.

Действительно, если цикл можно стянуть по поверхности V в точку, то он ограничивает диск D_2, целиком принадлежащий V, т.е. диск имеет краем цикл z – цикл z гомологичен нулю.

Определение. Два пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ на V, начинающиеся и кончающиеся в одних и тех же точках, называются гомотопными, если можно непрерывно по V один из них деформировать в другой.

Очевидно, гомотопность путей, начинающихся и кончающихся в двух фиксированных точках A и B является эквивалентностью, и значит, на их множестве возможна соответствующая факторизация.

Естественным образом введем произведение двух путей γ_1 и γ_2 таких, что конец первого γ_1 совпадает с началом второго – это путь, который является непрерывным образом суммы отрезков – прообразов путей γ_1 и γ_2 таким, что сужение на каждый отрезок дает соответствующий путь.



В дальнейшем будем рассматривать пути, начинающиеся и кончающиеся в одной и той же точке M_0 поверхности V – петли из точки M_0.

Очевидно, что если две петли гомотопны

$$\omega_1 \simeq \omega_2 \qquad (1)$$

то произведение первой на обратную второй гомотопна нулю

$$\omega_2^{-1} \cdot \omega_1 \simeq 0. \qquad (2)$$

Тогда очевидны теоремы:

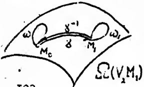
Теорема. Множество петель из одной точки M_0 поверхности V образуют группу относительно введенного произведения (невсегда абелеву).

Теорема. Множество петель из одной точки M_0 поверхности V гомотопных нулю образуют подгруппу группы петель.

Определение. Фактор-группа группы петель из точки M_0 по подгруппе гомотопных нулю называется фундаментальной группой поверхности V в точке M_0:

$$\pi(V, M_0) = \Omega(V, M_0) / \Omega_0(V, M_0)$$

Теорема. Если поверхность V связна, то фундаментальные группы различных ее точек M_0 и M_1 изоморфны.



Действительно, если γ – путь, соединяющий точки M_0 и M_1, то группы петель точек M_0 и M_1 и группы гомотопных нулю петель этих точек очевидно связаны зависимостями

$$\Omega(V, M_1) = \gamma\,\Omega(V, M_0)\,\gamma^{-1}, \quad \Omega_0(V, M_1) = \gamma\,\Omega_0(V, M_0)\,\gamma^{-1}, \qquad (3)$$

т.е. соответственно изоморфны между собой, а потому и фактор-группы первых по вторым будут изоморфны.

Поэтому соответствующую группу просто называют фундаментальной группой поверхности V.

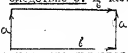
Следствие I. Фундаментальная группа сферы состоит из одного единственного элемента, т.к. любой ее замкнутый путь гомотопен нулю.

Следствие 2. Поскольку край многоугольника Пуанкаре ориентируемой поверхности рода p гомотопен нулю, то в число соотношений ее фундаментальной группы войдет соотношение

$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}\ldots=e \qquad (4)$$

Оказывается, что оно исчерпывает все ее соотношения.

Следствие 3. В частности для тора фундаментальная группа имеет единственное соотношение



$$aba^{-1}b^{-1}=e \qquad (5)$$

т.е. $ab=ba$

и, значит, она является свободной абелевой группой с двумя образующими

ПРИМЕРНЫЙ РАБОЧИЙ ПЛАН ЛЕКЦИЙ ПО РАЗДЕЛУ "ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ"

I.Общая топология

2.Теорема Эйлера для поверхности

3.Ориентируемость поверхности

4.Классификация замкнутых поверхностей

5.Правильные многогранники

6.Группы симметрий выпуклых метрически правильных многогранников

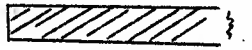
ПРИМЕРНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗДЕЛУ "ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ"

I. Топологическое пространство, открытые и замкнутые множества

I) Будут ли открытыми или замкнутыми множествами евклидовой прямой следующие множества: а) отрезок б) интервал в) полуинтервал г)полупрямая без начала д) полупрямая с началом е) совокупность отрезка и интервала

2) Будут открытыми или замкнутыми те же множества на евклидовой плоскости?

3) Будут ли на евклидовой плоскости открытыми или замкнутыми следующие множества: а) полуплоскость с краевой прямой, б) без этой прямой в) круг без края, г) круг с краем д) полоса заключенная между двумя параллельными прямыми, включая эти прямые, е) без этих прямых, ж) с одной из этих прямых и без другой, з) полуполоса



...оказать, что множество A топологического пространства T является открытым тогда и только тогда, когда каждая его точка внутренняя. 5) Доказать, что для любых множеств A, B топологического пространства T будет $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

6)Доказать, что в группе параллельных переносов евклидовой плоскости можно определить топологию аффинного пространства.

7)Доказать эквивалентность аксиоматик Хаусдорфа и Рисса для топологического пространства.

8)Определить понятия (не только неопределяемые) топологического пространства через неопределяемые понятия аксиоматики Рисса.

Домашнее задание

I) Сформулировать вопросы, аналогичные вопросам I-3 для евклидова пространства и ответить на них.

2) Доказать, что для любых множеств A, B пространства T будет

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

3) Доказать, что в группе движений на евклидовой плоскости можно определить топологию декартова произведения евклидовой плоскости на окружность.

4)Определить понятия топологического пространства через неопределяемые понятия аксиоматики Хаусдорфа.

II. Связные и компактные множества. Непрерывность и гомеоморфизм

I) Является ли связным на E_2 кольцо? 2)Является ли оно областью? 3) Является ли связной гипербола на E_2 (E_2^*)

4)Доказать, что если два топологических пространства связны, то и их топологическое произведение связно.

5) Компактен ли на $E_2(E_2^*)$ круг с краем (без края)?

6) Компактны ли с точки зрения индуцированной топологии в $E_3(E_3^*)$ сфера, эллипсоид, гиперболоид?

7) Доказать, что если топологическое пространство T можно отобразить непрерывно на топологическое пространство T', то из компактности T следует компактность T'.

8.Является ли гомеоморфизмом параллельное проектирование с прямой на прямую в одной плоскости.

9.Является ли гомеоморфизмом центральное проектирование с прямой на прямую ей параллельную (не параллельную) в одной плоскости?

IO.Является ли гомеоморфизмом и эквиморфизмом центральное проектирование открытой полусферы из ее центра на плоскость параллельную ее диаметральной плоскости? (Указание. Рассмотреть две параллельные прямые на плоскости).

II) Сохраняет ли гомеоморфизм связность?

I2) Доказать, что геликоид и катеноид гомеоморфны.

I3) Почему окружность и отрезок не гомеоморфны? (Указание: удаление произвольной точки из окружности не нарушает ее связности).

I4) Почему сфера и тор не гомеоморфны? (Указание: удаление меридиана из тора не нарушает его связности).

Домашнее задание.

I) Является ли связным множество точек $E_2(E_2^*)$ внутренних относительно эллипса, параболы, гиперболы?

2) Компактны ли окружность, парабола, гипербола на $E_2(E_2^*)$?

3) Доказать, что замкнутое множество компактного топологического пространства - компактно.

4) Доказать гомеоморфизм цилиндра и кольца.

5) Гомеоморфны ли окружность и восьмерка?

6) Гомеоморфны ли тор и крендель?

Ш. Классификация поверхностей (поверхностей с краем)

I) Определить порядок связности линейного комплекса

2) Определить эйлерову характеристику и порядок связности а) сферы, б) кольца, в) листа Мебиуса, г) тора, д) проективной плоскости, е) бутылки Клейна и указать их существенные циклы.

3) Доказать, что не существуют простые многогранники, все грани которых были бы шестиугольными.

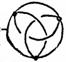
4) Доказать гомеоморфизм тора с одной дыркой и лент, нарисованных на с. 7.

5) Классифицировать поверхность нарисованной пряжки

6) Определить симметрии и элементы симметрий правильного тетраэдра.

Домашнее задание.

I) Определить порядок связности линейного комплекса



2) Определить эйлерову характеристику и порядок связности а) цилиндра, б) кренделя, и указать их существенные циклы.

3) Доказать, что не существуют правильные многогранники, все грани которых семиугольные.

4) Доказать гомеоморфизм поверхностей

5) Определить симметрии и элементы симметрии правильного октаэдра.

О преподавании геометрии в педагогическом институте

Настоящая работа завершает цикл моих методических работ ([7]-[14]), полностью охватывающих программу [26] по геометрии для педагогических институтов.

Они написаны с единой точки зрения, о которой я и хочу именно теперь и написать, так как декларировать и критиковать неизмеримо легче, чем предложить нечто конкретное, удовлетворяющее определенным позициям.

Характер преподавания науки зависит от двух обстоятельств:

А) состояния самой науки и Б) назначения, цели преподавания.

А) В отношении современной геометрии первое обстоятельство характеризуется тремя особенностями; которыми являются:

A_1) Обилие и полнота материала, что с одной стороны затрудняет ориентацию в нем, но с другой стороны дает свободу отбора, т.е. приводит к необходимости и возможности отбора и оптимальной организации материала.

A_2) Сильное пересечение геометрии с другими разделами математики, в частности пересечение различных разделов геометрии между собой, вплоть до взаимного проникновения. Это приводит к возможности и даже необходимости при изучении геометрии широкого использования других разделов математики, а также к необходимости объединения преподавания различных отделов геометрии в один предмет.

A_3) Третьей особенностью современной геометрии, как и всей математики, является большой ее выход к приложениям к практике и другим разделам науки, что приводит к необходимому уровню строгости.

Б) Назначение преподавания геометрии в педагогическом институте определяется следующими задачами:

$Б_1$) Расширить геометрический кругозор будущего учителя математики, а это значит не только и не столько дать ему дополнительные геометрические знания, сколько дать понимание путей развития геометрии;

$Б_2$) Развить интеллект будущего учителя, т.е. опять же для этого важны не столько сами факты геометрии, сколько логические рассуждения, доказательства, понимание необходимости и даже неизбежности того или иного шага;

$Б_3$) Научить на своем примере как надо преподавать геометрию - методике ее преподавания: как мы будем учить, так в большой степени и наши студенты - будущие учителя будут учить своих учеников: свободно и естественно или принудительно и начетнически.

Наилучшим образом этим особенностям геометрии и назначению ее преподавания в педагогическом институте отвечает преподавание, осно-

ванное на сочетании двух принципов: естественности и блочности. В чем они заключаются?

I. Принцип естественности. Известно, как мы получили свои заповеди: Моисей взошел на гору Сион и там нашел скрижали: каменные плиты, на которых были выбиты эти заповеди: не убий, не укради и т.д. В то время это было единственно правильной формой воспитания: люди были еще настолько дикими, что объяснение нравственности, разумности и целесообразности этих заповедей не дало бы того же результата, что божьи указания. Потребовался Лютер и Реформация, приблизившие Бога к людям, он потерял из-за этого некоторый ореол, но стал ближе, теплее и понятнее людям, стал по существу лишь персонификацией нравственности.

Также известно, как в средние века ремесленники учили подмастерьев своему ремеслу: сделай так-то и то-то, а кроме того подуй, поплюй; известно как лечили: определенные лекарства и процедуры, а кроме того, молитвы и т.д., т.е. нечто приблизительное, среди которого было и рациональное ядро. Это объяснялось двумя причинами: во-первых, техника и медицина не были полностью науками, мастера и врачи и сами не знали, что и почему в их рецептах, полученных эмпирическим путем, является существенным, а что посторонним, а во-вторых, здесь была и корысть: нарочно наводили муть, чтобы подольше поэксплуатировать своих учеников, уменьшить число конкурентов.

К сожалению в наше время в преподавании геометрии имеются замашки средневековых мастеров – некоторые профессора обучают геометрии как тысячи лет тому назад: вещают, напускают туману, дают указания, рассматривают те или иные вопросы без объяснения причин, доказательства составляют в виде непонятно каким образом полученной цепочки утверждений, да еще в последнее время появилась мода давать формулировки теорем без доказательства, что уже совсем разрушает математику, превращая ее в сборник рецептов.

Как же надо преподавать геометрию и в частности читать лекции? Лекции должны быть естественными. А что это значит? Без сомнения, самым естественным изложением является изложение, повторяющее историческое развитие науки, которое, конечно, отталкивается от интуиции. Но историческое развитие длинное и извилистое, не всегда наилучшее, заводящее в тупики, возвращающееся назад и т.д. Однако, существует биогенетический закон Геккеля: онтогенез повторяет филогенез – индивидуальное развитие организма повторяет в общих, основных чертах историческое развитие всего вида. Вот этот онтогенез нам и нужен. Как он относится к филогенезу, так преподавание геометрии должно относиться к историческому развитию геометрии, т.е. должно повторять его в выпрямленном, очищенном, основном виде. Поскольку историческое раз-

витие происходило на основании интуиции, то и преподавание должно быть таким.

Лекции должны быть легкими: имитировать импровизацию (за счет кропотливой тщательной подготовки).

Лекции должны быть открытыми: задача лектора осторожно, бережно и деликатно провести студентов по этому онтогенетическому пути: открыто ставить вопрос о пути и задачах соответствующего предмета, обсудить этот вопрос, наметить план и вместе со студентами его осуществлять, также обсуждая план доказательства каждой теоремы.

Такая подготовка каждого шага обеспечит сознательное усвоение материала. На этом пути все будет доказано - бездоказательным утверждениям не откуда будет взяться.

Такое изложение является также гарантией от многочисленных принципиальных ошибок, появляющихся при догматическом преподавании (ср. [4] ч.П с.8 с [9] с.13; [4] ч.П с.250 с [11] с.76; [4] ч.П с.242 с [11] с.89; [4] ч.П с.204 с [11] с.26; [4] ч.П с.144 с [10] с.11; [4] ч.П с. 347 с [13] с.133; [4] ч.П с. 165 с [11] с.9).

В связи с этим нужно поговорить об так называемых синтетических и аналитических доказательствах. Без сомнения аналитический метод сильный метод, но он слепой - для наших целей $Б_{1,2,3}$ он ничего не дает. Геометрия - это то в математике, что не зависит от аналитического аппарата - инвариантная часть математики, ее сущность, ее вершина. Эйфория от силы и возможностей аналитического метода давно прошла. Сейчас происходит геометризация всей математики: вся математика по возможности отказывается от аналитического метода и переходит на логический, т.е. на тот, который в геометрии называется синтетическим. Поэтому очень грустен неожиданный зигзаг в преподавании геометрии, когда высоконаучным стало считаться принизить геометрию до ее аналитических характеристик и ясные короткие геометрические доказательства заменять во много раз более длинными и слепыми аналитическими выкладками (ср. [4] ч.П с. 238 с [12] с.35; [4] ч.П с. 28 с [9] с.19; [4] ч.П с.268-270 с [11] с. 68; [4] ч.П с.212-214 с [11] с.51; [4] ч.П с.74-75 с [9] с.106).

Особенно недопустимы аналитические определения в геометрии; например: аффинным (проективным) преобразованием называется такое преобразование, что найдутся две аффинные (проективные) системы координат такие, что соответствующие точки относительно них имеют одинаковые координаты ([4] ч.I с.105, [4] ч.П с.31 ср. с [9] с.36); сложным отношением четырех точек одной прямой называется число, получающееся из их координат по такой-то формуле ([4] ч.П с. 44 ср. с [9] с.75); изображение называется полным, если к нему можно присоединить изобра-

жение аффинной системы координат такой, что по изображению каждой точки можно построить изображения ее параллельных проекций на координатные плоскости ([4] ч.П с.I44 ср. с [I0] с. II); две аффинные системы координат на плоскости называются одинаково ориентированными, если определитель матрицы перехода координатных векторов положителен ([4] ч.I с.44 ср. с [7] с.50). Никакая интуиция не даст этого.

После такого преподавания появляется тоска и ненависть к геометрии – самой красивой и наглядной части математики.

Здесь же нужно сказать о степени строгости. Сознательное построение курса естественно само определит уровень необходимой строгости. Строгость всегда должна быть объяснена, излишняя строгость – это формализм. Строгость нужна не в словах, а в соразмерности курса, в строгости к себе, в том, чтобы все было доказано – математика не нуждается в бездоказательных утверждениях. Например, совершенно нет необходимости излагать дифференциальную геометрию евклидова пространства на топологической основе ([4] ч.П с.306, с.322), ибо в евклидовом пространстве непрерывность прекрасно можно определить и по Коши.

Конечно, беседы между доказательствами и определениями занимают какое-то время, но оно в 3-4 раза окупается экономией от коротких геометрических доказательств вместо унылой арифметики, а также от способа организации маткриала, который я называю принципом блочности.

П. Принцип блочности. В старые времена, когда мало строили домов, машин, шили одежду, создавали среди прочих и прекрасные дворцы, чудесные машины, красивейшие платья. Теперь, когда строить нужно очень много домов, машин, ремонтировать их, когда по одежде не отличишь герцогиню от продавщицы, т.е. все материальное имеет не столько престижное, сколько функциональное значение, пришли к всеобщей стандартизации: очень тщательно проанализировав построение любых объектов, из них выделяют блоки, как можно более крупные, из которых и строят любые вещи и при этом получают большую экономию.

Также и в построении курса геометрии, тщательнейшим образом проанализировав весь курс, выделим в нем по возможности наиболее крупные блоки, из которых и строим всю теорию. В Этом и заключается одна из основных особенностей современной математики. Приведем примеры.

I) Имеет смысл в аналитической геометрии ([7], [8]) сознательно резко разделить аффинные и метрические свойства евклидовой геометрии, это повторится и в проективной геометрии при рассмотрении проективных моделей аффинной и евклидовой геометрии ([9] с.I02), в методах изображений при рассмотрении аффинно-полных и метрически-полных изображений ([I0] с.26, с.4I), в основаниях геометрии, когда рассматриваются аксиоматики проективной, аффинной, евклидовой геометрий ([II] с.3, с.5).

2) Очень оправдано введение в аналитической геометрии метрики в общем репере при помощи задания скалярного произведения координатных векторов $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = g_{ij}$, это повторяется в дифференциальной геометрии при введении I-ой квадратичной формы поверхности ([I3] с.95), в методах изображений – при рассмотрении метрически-полных аксонометрических изображений ([I0] с.47), в топологии – при рассмотрении групп симметрий правильных многогранников (с.85).

3) Рассмотрение главных направлений кривой 2-го порядка в аналитической геометрии как собственных направлений квадратичной формы кривой относительно метрической квадратичной формы повторяется в дифференциальной геометрии при отыскании главных направлений поверхности ([I3] с.II9) как собственных направлений второй квадратичной формы поверхности относительно ее первой формы.(Здесь нужно отметить бессмысленность при наличии второй квадратичной формы поверхности введения индикатрисы Дюпена ([4] ч.П с.333-334 ср. с [I3] с.II9)).

4) Имеет смысл сначала ввести понятие величины ([II] с.38) и рассмотреть вопрос об ее измерении, а затем применить его к измерению длин отрезков ([II], с.46), площадей многоугольников, величин углов ([II] с.54), площадей сферических треугольников ([I2] с. 4I), эйлеровой характеристики компактной поверхности (с. 56).

5) Многие теоремы проективной геометрии имеет смысл ([9]) сразу доказывать для общей размерности n ,а не повторять их для n=I,2,3.

6) Аксиоматики геометрий Лобачевского и Римана имеет смысл вводить как продолжения проективной аксиоматики дополнением лишь двух аксиом ([II] с.83,с.89) причем так, что одна из них у них общая, и тем самым теории их будут сильно пересекаться.

7) В силу полноты аксиоматики Лобачевского имеет смысл проверять лишь одну ее интерпретацию – например, Клейна (или Пуанкаре),а другие например,Пуанкаре ([I4] с.I70) (или Клейна) и Бельтрами на псевдосфере ([I3],с.I32) получать из нее биекцией ([I3],с.I45).(Кстати, проверка на псевдосфере одной лишь аксиомы о неравенстве треугольника не доказывает интерпретации Бельтрами ([4] ч.П с. 349)).

Из приведенных примеров видно, что организация материала по блочному методу и естественное его построение I) дает экономию времени в 3-4 раза, что позволяет его истратить на более осмысленные беседы о путях развития науки и на сообщение дополнительного материала; 2) разгружает память от механического запоминания; 3) сокращает число понятий и доказательств; 4) проясняет и упрощает логические зависимости; 5) облегчает доказательства; 6) от частого употребления укрепляет овладение основными вещами -этими блоками. Блочно-естественный метод преподавания геометрии дает прекрасные практические результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А л е к с а н д р о в П.С. Комбинаторная топология. М.,Гостехиздат, 1947.
2. А л е к с а н д р о в П.С. Введение в теорию групп. М.,Учпедгиз, 1951.
3. А т а н а с я н Л.С., Г у р е в и ч Г.Б. Геометрия 2. М.,"Просвещение", 1976.
4. Б а з ы л е в В.Т., Д у н и ч е в К.И.Геометрия I (1974), Геометрия П. М., "Просвещение",1975.
5. Б о л т я н с к и й В.Г., Е ф р е м о в и ч В.А. Очерк основных идей топологии. М.,"Математическое просвещение", № 2,3,4,6,1957, 1958, 1958, 1961.
6. Б о л т я н с к и й В.Г., Е ф р е м о в и ч В.А. Наглядная топология. М., "Наука", 1982.
7. В а с и л ь е в а М.В. Методические рекомендации и указания по геометрии (МРУГ) ч.I,Геомеотрия на плоскости.М.,МГПИ им.В.И.Ленина, 1979.
8. В а с и л ь е в а М.В. МРУГ,ч.П-Геометрия в пространстве. М., МГПИ им. В.И.Ленина, 1979.
9. В а с и л ь е в а М.В.МРУГ,ч.Ш- Проективная геометрия. М.,МГПИ им. В.И.Ленина, 1981.
10. В а с и л ь е в а М.В. МРУГ, ч.IУ- Методы изображений. М.,МГПИ им. В.И.Ленина, 1980.
11. В а с и л ь е в а М.В. Методическая разработка к спецкурсу "Основания геометрии". М., МГПИ им. В.И.Ленина, 1984.
12. В а с и л ь е в а М.В. МРУГ, - Сферическая геометрия.Горький, ГГПИ им. М.Горького, 1984.
13. В а с и л ь е в а М.В. Учебное пособие по дифференциальной геометрии. М., МГПИ им. В.И.Ленина, 1978.
14. В а с и л ь е в а М.В. Изложение геометрии Лобачевского на базе школьной аксиоматики. Сб.Проблемы подготовки учителя математики в пединститутах, с.153-178, М., МГЗПИ, 1980.
15. В а с и л ь е в а М.В. Группы Ли преобразований. М.,МГПИ им. В.И. Ленина, 1969.
16. Е ф р е м о в и ч В.А. Основные топологические понятия. М.,ЭЭМ, кн.У, с. 447-557, "Наука", 1966.
17. Е ф р е м о в и ч В.А., Ч е р н а в с к и й А.В. Элементы топологии, ч.I,ч.2, Ярославль, 1977, 1981.
18. Е ф р е м о в и ч В.А., Р у д я к Ю.Б. Характеристика Декарта -

Эйлера, с.35-38. Сб. Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1976.
19. Житомирский О.К., Львовский В.Д., Милинский В.И. Задачи по высшей геометрии.ч.I, отд.I Analysis Situs М.,-Л., ОНТИ, 1935.
20. Зейферт Г. и Трельфаллль В. Топология.М.-Л., ГОНТИ, 1938.
21. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М., "Мир", 1983.
22. Кононов С.Г., Феденко. Методические указания по разделу "Общая топология". Минск, Белорусский университет, 1981.
23. Riesz F., "Atti del IV Congresso Intern. dei Matem. Roma, 1908" v.2, Roma, 1909, p.18-24.
24. Синюков Н.С., Матвеенко Т.И. Топология. Киев, "Вища школа", 1984.
25. Стинрод Н, Чинн У, Первые понятия топологии. М., "Мир", 1967.
26. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.-Л., ОНТИ, 1934
27. Программы педагогических институтов. Сборник № 3, Геометрия и алгебра и теория чисел. М., "Просвещение", 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

ГЛАВА IУ. ГОМОЛОГИИ И ГОМОТОПИИ

Майя Владимировна Васильева

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА К СПЕЦКУРСУ

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

Подп. к печ. 21.12.84. Уч.изд.л. 7 Печать офсетная
Формат 60х90/16 Усл.печ.л.7,5 Цена 70 к.
Тираж 1000 Заказ 1848

Московский государственный педагогический институт
имени В.И.Ленина
Москва, 119882, Малая Пироговская ул. дом 1.
Типография МГПИ им. В.И.Ленина
Москва, 129243, ул.Кибальчича, д.6.

Цена 70 коп.